

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Aeroespacial

Análise de flambagem em placas reforçadas

Autor: Larissa Lourrane Torres Vidal
Orientador: Prof.Dr. Artem Andrianov

Brasília, DF
2019



Larissa Lourrane Torres Vidal

Análise de flambagem em placas reforçadas

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Aeroespacial) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Aeroespacial).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof.Dr. Artem Andrianov

Brasília, DF

2019

Larissa Lourrane Torres Vidal

Análise de flambagem em placas reforçadas/ Larissa Lourrane Torres Vidal. –
Brasília, DF, 2019-

71 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof.Dr. Artem Andrianov

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2019.

1. Palavra-chave01. 2. Palavra-chave02. I. Prof.Dr. Artem Andrianov. II.
Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Análise de flambagem
em placas reforçadas

CDU 02:141:005.6

Larissa Lourrane Torres Vidal

Análise de flambagem em placas reforçadas

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Aeroespacial) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Aeroespacial).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 26 de Fevereiro de 2019:

Prof.Dr. Artem Andrianov
Orientador

**Prof.Dr. Manuel Nascimento Dias
Barcelos Júnior.**
Convidado 1

**Prof.Dr. Sergio Henrique da Silva
Carneiro**
Convidado 2

Brasília, DF
2019

*Dedico este trabalho a memória das minhas avós Maria do Rosario Torres e Edna Vidal,
por participarem com veemência da minha educação, com todo amor do mundo e
gratidão.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por me proporcionar chegar até aqui. Agradeço à minha família, em especial meus pais, Elder Vidal e Kátia Vidal, meu irmão João Vitor Vidal e minha tia Jéssika Carvalho, que dividem comigo além de um lar as lutas e conquistas diárias e que sempre apoiam e encorajam meus sonhos.

Agradeço a todos os professores que tive a oportunidade de ter aulas durante a graduação, em especial ao meu orientador, Artem Andrianov, por toda atenção e por sempre estar disposto a gentilmente ajudar.

Agradeço aos meus amigos que tive a oportunidade de conhecer durante a caminhada dos quais dividiram belos momentos comigo que vão além da sala de aula, em especial à Júlia Henriques, por dividir comigo a jornada acadêmica e está presente nos momentos de descontração me incentivando sempre a ser uma pessoa melhor em todos sentidos da vida.

Gostaria de agradecer também à Atlética Maquinada, por me proporcionar viagens, histórias, momentos de alegrias e amigos incríveis. Guardarei tudo isso com muito carinho, pois é sempre muito bom estar na presença de vocês. Por fim, agradeço a todos que cruzaram meu caminho durante essa jornada, pois se a caminhada foi mais leve foi devido as pessoas que tive a oportunidade de conhecer.

Resumo

Placas planas e reforçadas são estruturas comumente utilizadas na indústria aeronáutica, geralmente atuam como revestimento e suportam diferentes tipos de esforços solicitantes. Estas placas são fabricadas de diversas formas, no presente trabalho é analisada as placas fabricadas pelo método de usinagem. A flambagem nestas placas ocorrem quando as mesmas são submetidas a carregamentos compressivos.

Este trabalho apresenta uma análise de placas planas e reforçadas com diferentes geometrias de seção transversal quando submetidas ao fenômeno de flambagem. Mostra-se as tensões críticas para cada geometria e os diferentes casos em que estas poderão flambar, assim, inferindo qual o caso mais crítico e a melhor placa a ser utilizada na indústria aeronáutica. Apresenta-se também uma análise sensibilidade de cada placa por meio do redimensionamento da seção transversal com o objetivo de observar como as cargas distribuídas se comportam. Por fim, faz-se uma análise numérica para conferência dos resultados analíticos.

Palavras-chaves: placa reforçada. flambagem. indústria aeronáutica.

Abstract

Plates and reinforced plates are common structures in aeronautical industry, which act as routers and support different types of requesting efforts. These plates are manufactured in various ways and are not presented as plates manufactured by the machining method. The buckling in these plates occurs when they are subjected to compressible loads.

This work presents an analysis of reinforced plates with different cross section geometries when subjected to the buckling phenomenon. It shows the critical tensions for each geometry and the different cases in which they can buckling, thus inferring which is the most critical case and the best board to be used in the aeronautical industry. A sensorial analysis of each plate is also presented by resizing the cross section. Finally, a numerical analysis is carried out to organize the analytical results.

Key-words: reinforced plate. buckling. aeronautical. industry.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Asa de uma aeronave - Material quimicamente tratado. (CONCORDE., 2014)	16
Figura 2 – Bordo de ataque-asa de uma aeronave- Painéis Honeycomb. (US, 2012)	17
Figura 3 – Revestimento da asa usinado.(CONCORDE., 2014)	18
Figura 4 – Revestimento da asa fabricado de forma integral.(US, 2012)	18
Figura 5 – Coluna biapoiada submetida a carga axial.	22
Figura 6 – Placa isotrópica plana.	25
Figura 7 – k- Coeficiente de flambagem para placas simplesmente apoiadas. (MEGSON, 2007)	26
Figura 8 – Flambagem local da placa entre enrijecedores. (CARDOSO, 2009)	27
Figura 9 – Flambagem dos enrijecedores. (CARDOSO, 2009)	27
Figura 10 – Flambagem da placa como um todo. (CARDOSO, 2009)	27
Figura 11 – Placa reforçada. Adaptado (MEGSON, 2007)	28
Figura 12 – Elemento SHELL 181.	32
Figura 13 – Placa com reforçador em T	35
Figura 14 – Placa com reforçador em Z	35
Figura 15 – Placa com reforçador em U	35
Figura 16 – Placa com reforçador plano	36
Figura 17 – Geometria da placa de seção transversal T.	38
Figura 18 – Demonstração da aplicação das condições de contorno.	40
Figura 19 – Condições de contorno da placa de seção transversal T.	40
Figura 20 – Gráfico de resultados da placa plana.	41
Figura 21 – Gráfico de resultados da placa de seção transversal T.	41
Figura 22 – Variação de 20% da altura do reforçador , placa em T CASO1.	43
Figura 23 – Variação de 20% da altura do reforçador , placa em T CASO3.	43
Figura 24 – Variação de 20 % da base que atua como revestimento, placa T CASO1.	44
Figura 25 – Variação de 20 % da base que atua como revestimento, placa T CASO 2.	44
Figura 26 – Variação de 20% da espessura, placa T.	45
Figura 27 – Variação de 20% da flange horizontal do reforçador, placa T CASO1.	46
Figura 28 – Variação de 20% da flange horizontal do reforçador, placa T CASO4.	46
Figura 29 – Gráfico da convergência da malha da placa plana.	47
Figura 30 – Gráfico da convergência da malha da placa reforçada.	48
Figura 31 – Seção transversal da placa com reforçador em T.	53
Figura 32 – Seção transversal do reforçador, placa em T.	53
Figura 33 – Seção transversal da placa entre os reforçadores, placa em T.	55
Figura 34 – Seção transversal da placa vertical dos reforçadores, placa em T.	55

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados analíticos- Placa plana	34
Tabela 2 – Resultados analíticos placas reforçadas	37
Tabela 3 – Refinamento da malha da placa plana	38
Tabela 4 – Refinamento da malha da placa reforço em T	39
Tabela 5 – Resultados numéricos.	41
Tabela 6 – Nx- Cargas distribuidas das placas referente a flambagem.	42
Tabela 7 – Resultados analíticos e numéricos- Placa plana	46
Tabela 8 – Resultados analíticos e numéricos- Placas reforçadas.	47
Tabela 9 – Cálculo do centroide em milímetros (mm).	54
Tabela 10 – Nx- Carga distribuida da placa T referente a flambagem.	56

Lista de símbolos

A	Área total
A_o	Área de seção transversal
\bar{t}	Espessura equivalente
\bar{y}	Centroide
I_x	Momento de inércia
P_a	Carga aplicada
P_{cr}	Carga crítica
C	Condição de contorno
σ_{cr}	Tensão crítica
N_x	Carga distribuida
E	Módulo de elasticidade
I	Momento de inércia
D	Rigidez da placa
k	Coefficiente do modo de flambagem
m	Número referente ao modo de flambagem
t	Espessura da placa
\bar{t}	Espessura equivalente da placa
a	Comprimento da placa
b	Largura da placa
b_{sk}	Largura da placa entre os reforçadores
t_{sk}	Espessura da placa entre os reforçadores
b_{st}	Largura da placa que representa os reforçadores
t_{st}	Espessura dos reforçadores

A_{st}	Área da seção transversal da placa como um todo
u	Matriz de deslocamentos MEF
U	Energia potencial
K	Matriz de rigidez
k_a	Matriz de rigidez linear
k_d	Matriz de rigidez diferencial não linear referente ao material
K_d	Matriz de rigidez diferencial não linear do sistema como um todo, considerando a carga aplicada.
λ	Autovalores
ν	Coefficiente de Poisson
T	Geometria da seção transversal do reforçador da placa 1.
Z	Geometria da seção transversal do reforçador da placa 2.
U	Geometria da seção transversal do reforçador da placa 3.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS	19
1.1.1	Objetivo geral	19
1.1.2	Objetivos específicos	19
1.2	METODOLOGIA	19
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	FLAMBAGEM EM COLUNAS	21
2.1.1	Método de solução sugerido por Euler	22
2.2	FLAMBAGEM EM PLACAS	23
2.2.1	Método de solução sugerido por Kirchoff-Love	24
2.3	FLAMBAGEM EM PLACAS REFORÇADAS	26
2.3.1	Método de solução sugerido por Gerard	28
2.3.1.1	Instabilidade local	28
2.3.1.2	Instabilidade da placa reforçada	28
2.4	MEF- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	29
3	RESULTADOS	34
3.1	RESULTADOS ANALÍTICOS	34
3.1.1	Placa plana	34
3.1.2	Placas reforçadas	34
3.1.3	Caso 1- Flambagem no reforçador como uma coluna.	36
3.1.4	Caso 2- Flambagem da placa entre as flanges do reforçador	36
3.1.5	Caso 3- Flambagem da flange vertical do reforçador	36
3.1.6	Caso 4- Flambagem da flange horizontal do reforçador	37
3.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	37
3.2.1	PRÉ - PROCESSAMENTO	37
3.2.1.1	Definição das propriedades mecânicas	37
3.2.1.2	Confecção da geometria	37
3.2.2	Confecção da malha	38
3.2.3	PROCESSAMENTO	39
3.2.3.1	Aplicação das condições de contorno	39
3.2.4	PÓS- PROCESSAMENTO	40
3.2.4.1	Resultados numéricos	40

4	DISCUSSÕES	42
4.1	RESULTADOS ANALÍTICOS	42
4.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	46
5	CONCLUSÃO	49
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	50
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICE A – CÁLCULOS ANALÍTICOS	53
A.1	Placa com reforçador em T	53
	APÊNDICE B – CÓDIGOS IMPLEMENTADOS NO MATLAB	57
B.1	PLACA COM REFORÇADOR EM 'I'	57
B.1.0.1	VARIAÇÃO DA ALTURA DO REFORÇADOR	57
B.1.0.2	VARIAÇÃO DO REVESTIMENTO	59
B.1.0.3	VARIAÇÃO DA ESPESSURA	60
B.2	PLACA COM REFORÇADOR EM 'T'	62
B.2.1	VARIAÇÃO DA ALTURA DO REFORÇADOR	62
B.2.2	VARIAÇÃO DO REVESTIMENTO	64
B.2.3	VARIAÇÃO DA ESPESSURA	66
B.2.4	VARIAÇÃO DA FLANGE HORIZONTAL DO REFORÇADOR	69

1 INTRODUÇÃO

O estudo da flambagem vem sendo desenvolvido e tem como pioneiro neste desenvolvimento Euler, o mesmo obteve a primeira carga crítica de uma coluna biapoiada sob uma carga axial compressiva aplicada em seu topo.([BEER; JHONSTON, 1989](#)) Tendo como base estes primeiros estudos, por conseguinte, foi desenvolvido o estudo do mesmo fenômeno físico para diversas estruturas com formas geométricas variadas, levando em consideração vários tipos de carregamentos e condições de contorno.

As placas submetidas a carregamentos compressivos também estão sujeitas ao fenômeno de flambagem, conhecer suas cargas críticas e cargas de ruptura se faz necessário para o correto e seguro funcionamento da estrutura de modo que a mesma consiga responder aos esforços solicitantes de forma satisfatória. O estudo deste fenômeno pode ser feito por meio de equações de equilíbrio ou pelo método da energia. ([TIMOSHENKO, 1940](#))

Para conhecer o comportamento de uma placa reforçada submetida à flambagem se faz necessário entender como as colunas e a placas reagem ao mesmo fenômeno físico individualmente, pois as colunas atuam como reforçadores da placa como um todo e a placa atua como revestimento.

Existem vários tipos de aplicações dentro do contexto da engenharia como um todo, pois as mesmas são utilizadas desde construções civis até projetos mecânicos, comumente utilizadas na indústria automobilística e aeronáutica. Tomando como base a indústria aeronáutica, tem-se como claro exemplo de aplicação as aeronaves, visto que as placas reforçadas são bastante utilizadas na sua estrutura como um todo.

As aeronaves de forma geral são formadas por vários componentes sendo estes, asa, fuselagem, estabilizadores, superfícies de controle e trens de pouso. Estes componentes dividem-se em vários outros membros estruturais, como os reforçadores, longarinas, nervuras e paredes. Todos estes membros são projetados para suportarem as cargas e reagirem aos esforços solicitantes. ([MEGSON, 2007](#))

Em uma aeronave é habitual o uso de placas reforçadas, geralmente essas placas são reforçadas por longarinas e nervuras e usadas na confecção da asa e fuselagem. Estas, sofrem diversos tipos de esforços e quando a placa é submetida a uma carga compressiva a mesma esta sujeita ao fenômeno de flambagem. Determinar as cargas críticas destas se torna essencial para garantir a segurança da estrutura.

A forma como a placa reforçada é confeccionada influencia diretamente a forma e os tipos de flambagem que a mesma está sujeita a sofrer, por esse motivo se faz necessário conhecer a forma como as placas são fabricadas. Existem vários processos de fabricação para confecções destas placas, alguns comumente usados são o processo de usinagem e o processo manual. O processo manual acontece da seguinte forma, os elementos de reforço são fixados a placa manualmente, por meio de rebites, parafusos e colagem. As vantagens e desvantagens da utilização destes painéis estão listadas a seguir:

- Vantagens: (ALDERLIESTEN, 2011)
 - Não há necessidade de vigas.
 - Estrutura lisa de ambos os lados.
- Desvantagens:(ALDERLIESTEN, 2011)
 - Apresenta dificuldade na junção das peças no seu processo de fabricação.
 - Caso seja necessário reparo o processo apresenta complexidade.

As figuras 1 e 2, uma com aplicação na asa e outra com aplicação no bordo de ataque de uma aeronave, confeccionada de painéis e longarinas quimicamente tratados e de painéis honeycomb ligadas a estrutura de alumínio respectivamente falando, ilustram o exemplo citado.

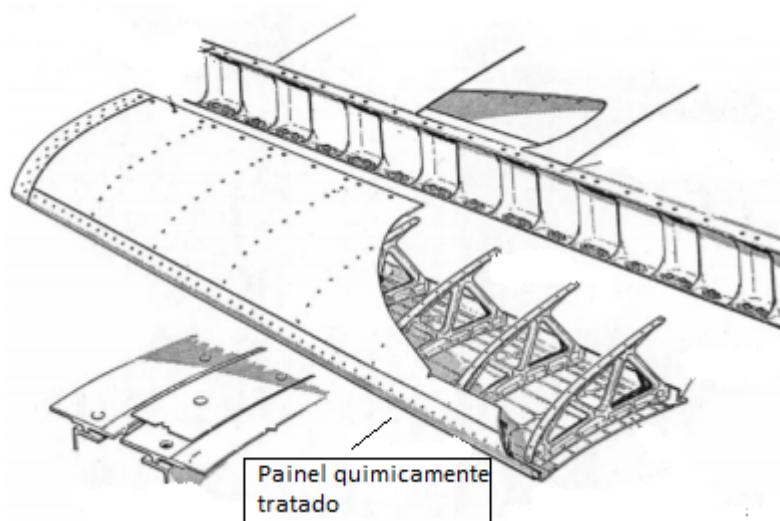


Figura 1 – Asa de uma aeronave - Material quimicamente tratado. (CONCORDE., 2014)

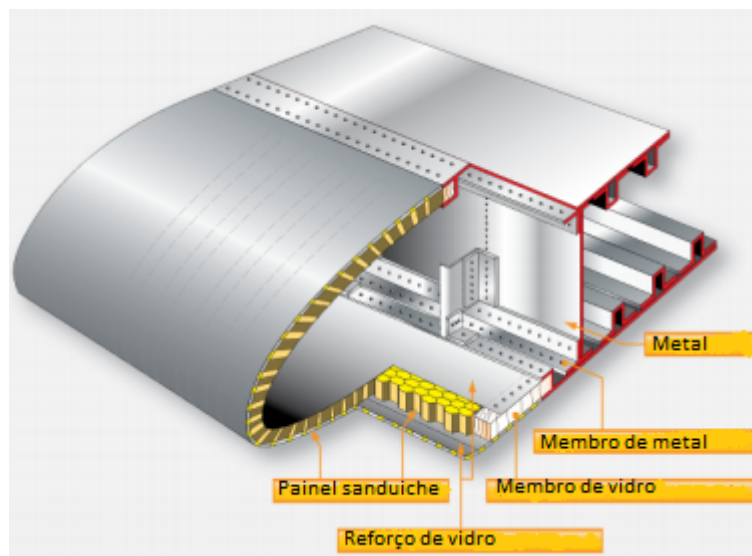


Figura 2 – Bordo de ataque-asa de uma aeronave- Painéis Honeycomb. (US, 2012)

As placas também são usinadas e confeccionadas por meio de extrusão, de forma que os elementos de reforço e a placa seja uma peça única, assim, não sendo necessário o uso de rebites, parafusos ou utilização do processo de colagem. O processo de usinagem, prática comum na indústria de conformação de metal, geralmente é realizado por meio de uma dobra mecânica de três pontos. Este processo é realizado com o objetivo da formação de ressaltos na placa, atualmente usados para confeccionar o revestimento do corpo e da asa de aviões da Boeing. (NASA; MUNROE; GRUBER, 2000) As vantagens e desvantagens deste modelo de confecção estão listadas a seguir:

- Vantagens: (ALDERLIESTEN, 2011)
 - Baixo custo.
 - Baixo número de peças.
 - Espessura continuamente adaptável, com o intuito de obter melhor otimização do peso.
- Desvantagens: (ALDERLIESTEN, 2011)
 - Rápido crescimento de trincas.
 - Mais da metade do material utilizado no processo torna-se resíduo remanescente.

As figuras 3 e 4, com aplicação na asa de uma aeronave, ilustram o exemplo citado.

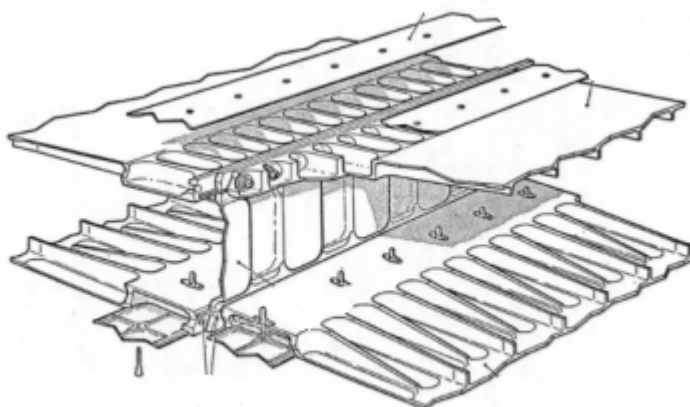


Figura 3 – Revestimento da asa usinado.([CONCORDE., 2014](#))

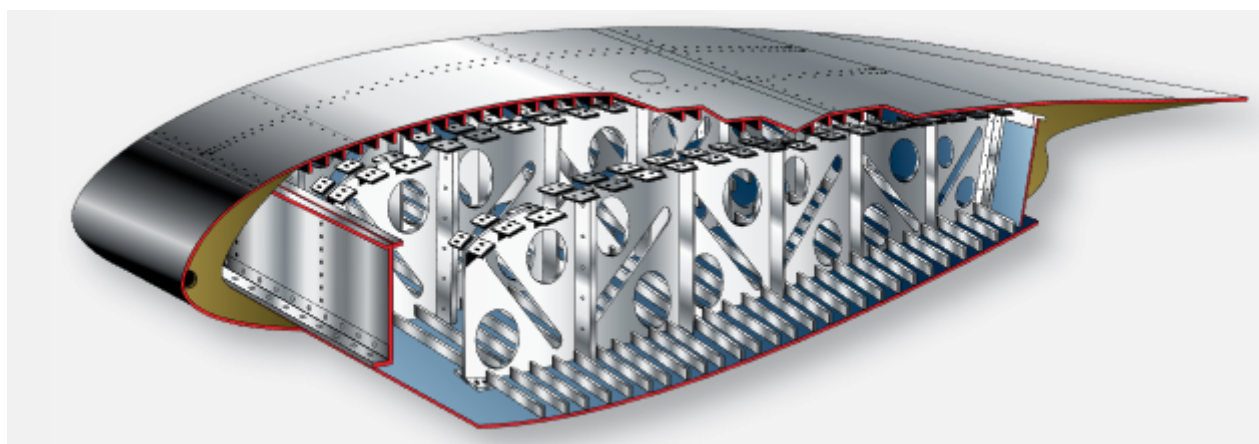


Figura 4 – Revestimento da asa fabricado de forma integral.([US, 2012](#))

Nota-se que a principal diferença entre os dois métodos citados, do ponto de vista estrutural, é que em caso de danos ou rachaduras o primeiro, por possuir rebites e parafusos, possui uma barreira natural evitando a propagação das trincas. Já o segundo, por ser confeccionado de forma integral, não possui essa barreira natural, desta forma a trinca se propaga com maior facilidade. ([ALDERLIESTEN, 2010](#))

Para título de análise a placa utilizada no presente trabalho será a de estrutura integral, onde não haverá rebites, parafusos e afins. Mesmo possuindo algumas desvantagens estruturalmente falando, trata-se de uma estrutura bastante utilizada na indústria por possuir baixo custo visto que sua usinagem é realizada em alta escala diminuindo, assim, seus custos.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo do presente trabalho é a análise do comportamento de placas reforçadas quando submetidas a carregamentos que ocasionam o fenômeno de flambagem no modo linear. Mostra-se que a placa reforçada pode ser apresentada como uma placa plana de mesmo peso específico. Encontrar as cargas críticas pelos métodos analíticos, sugerido por Gerard, e métodos numéricos. Comparar os resultados analíticos e numéricos para a placa plana. Por fim, escolher a melhor placa do ponto de vista de estabilidade e peso específico.

1.1.2 Objetivos específicos

Realizar uma revisão bibliográfica para flambagem em colunas, placas planas, placas reforçadas e para o método dos elementos finitos aplicado a resolução de flambagem. Realizar os cálculos analíticos e simulações numéricas para placa plana e reforçada. Por fim, comparar os resultados analíticos e numéricos para a placa plana e fazer uma análise de eficiência para as placas reforçadas considerando as diferentes formas de longarinas.

1.2 METODOLOGIA

A metodologia aplicada divide-se nos seguintes passos:

- Utilizar o método da energia para os cálculos analíticos da placa plana.
- Utilizar o método de solução sugerido por Gerard para cálculos analíticos das placas reforçadas.
- Uso do software de elementos finitos ANSYS, versão estudantil, para análise numérica das placas. Assim, sendo possível fazer a análise de eficiência das placas reforçadas e comparar resultados analíticos e numéricos da placa plana.
- Utilizar como material das placas em análise o Alumínio 7075-T6: Material de alta resistência usado para peças estruturais altamente tensionadas. Existem inúmeras aplicações para este alumínio como: Conexões de aeronaves, engrenagens e eixos, peças de fusíveis, eixos de medidores e engrenagens, peças de mísseis, peças de válvulas reguladoras, engrenagens helicoidais, chaves, aeronaves, aplicações aeroespaciais e de defesa. ([ASM, 2001](#))

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente documento será dividido em seis principais partes do texto.

No capítulo 1 faz-se uma apresentação inicial do fenômeno de flambagem em colunas, placas e placas reforçadas, explicitando as afirmações de outros autores com o objetivo de evidenciar a importância da consideração deste fenômeno em uma análise estrutural. Em seguida, é mostrada a aplicação das placas reforçadas na indústria aeronáutica por meio de exemplos, mostrando como se dá o processo de fabricação e como isto influencia diretamente na forma como a placa irá flambar.

A revisão bibliográfica consta no capítulo 2 e apresenta um breve estudo a respeito da flambagem. Primeiramente, mostra-se o estudo de flambagem em colunas, pois a mesma atua como o reforço de uma placa reforçada, assim, fazendo-se necessário o entendimento do fenômeno estudado neste tipo de geometria. Em seguida, é mostrado o estudo da flambagem em placas, pois este tipo de geometria é utilizado como o revestimento de uma placa reforçada, com isso, é necessário o melhor entendimento da mesma. Por fim, mostra-se o estudo da flambagem na placa reforçada como um todo, onde há o reforço e o revestimento.

No capítulo 3 encontra-se os cálculos analíticos onde há a tensão crítica para cada placa em análise considerando todos os casos em que essa pode vir a flambar. Em seguida, no capítulo 4 é apresentado a análise numérica realizada nas placas.

Os resultados e uma breve discussão sobre os mesmos são explicitados no capítulo 5. Por fim, encontra-se no capítulo 6 conclusões a respeito do presente trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A flambagem é um fenômeno que ocorrer em peças esbeltas, ou seja, peças em que a área de seção transversal é muito pequena com relação ao seu comprimento, este fenômeno ocorre quando a peça encontra-se submetida a carregamentos compressivos. Ao sofrer a ação de uma carga axial de compressão, a peça pode perder a sua estabilidade, sem que o material tenha atingido o seu limite de escoamento. Este colapso ocorrerá sempre na direção do eixo de menor momento de inércia de sua seção transversal. ([MELCONIAN, 2010](#))

Existem vários fatores que viabilizam a ocorrência deste efeito, os principais são:

- Instabilidade de forma: a peça fica com sua forma instável quando a compressão atinge um valor crítico.
- Excentricidade: quando a carga possui um desvio ou determinado distanciamento do centro em caso de peças retilíneas.

Quando se trata da estabilidade estrutural, o fenômeno de flambagem ocorre em elementos compridos e esbeltos sujeitos a uma força axial de compressão. A deflexão lateral que estas peças sofrem é chamada de flambagem. Portanto, a flambagem leva a uma falha repentina e dramática da estrutura. ([JANSSEUNE A.; CORTE, 2013](#))

A característica principal das falhas por flambagem é que a carga de falha depende principalmente do módulo elástico e da rigidez da seção transversal, e é quase independente da tensão de escoamento do material. É bem possível que uma duplicação desta tensão alcançará um aumento de menos de um por cento da tensão crítica de flambagem. ([BAZANT; CEDOLIN, 2010](#))

2.1 FLAMBAGEM EM COLUNAS

As colunas possuem a característica de serem elementos longos e esbeltos, ou seja, peças onde sua área transversal é pequena em relação ao seu comprimento. Assim, podendo fletir lateralmente e falhar por flexão. A estabilidade desta estrutura é dada pela capacidade desta suportar uma carga sem sofrer grandes deformações com relação a sua posição inicial.

2.1.1 Método de solução sugerido por Euler

Os primeiros estudos do fenômeno da flambagem foram feitos por Euler, este começou seus estudos considerando uma peça ideal. A peça adotada por Euler foi uma coluna biapoiada, submetida a uma carga axial compressiva em seu topo com flambagem atuando no regime elástico.

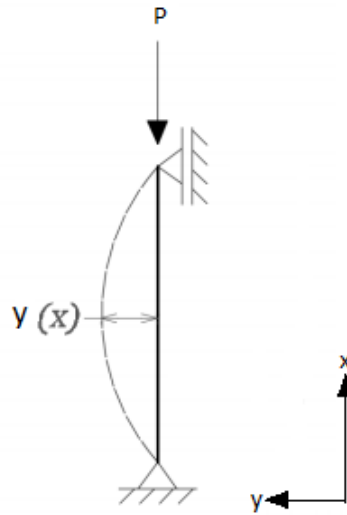


Figura 5 – Coluna biapoiada submetida a carga axial.

Levando em consideração que P é a carga axial aplicada sobre a coluna e P_{cr} é a carga crítica, onde esta é a carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de se submeter a flambagem. Deve-se considerar que existem três tipos de equilíbrio, são estes:

- Equilíbrio estável: $P < P_{cr}$, a coluna permanece na posição reta.
- Equilíbrio neutro: $P = P_{cr}$, a coluna também permanece na posição reta.
- Equilíbrio instável: $P > P_{cr}$, a coluna irá flambar.

Para encontrar os esforços críticos usa-se as equações diferenciais das curvas de deflexão de uma viga, pois uma coluna flambada flete da mesma maneira que uma viga. A equação diferencial da curva de deflexão é: (BEER; JHONSTON, 1989)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0 \quad (2.1)$$

Leva-se em consideração a equação 2.2.

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.2)$$

A sua solução geral é dada pela equação 2.3.

$$y = C1 \sin kx + C2 \cos kx \quad (2.3)$$

Nota-se que C1 e C2 são as coeficientes a determinar e estas são determinadas pelas condições de contorno das extremidades, temos que $y=0$ em $x=0$ então $C2=0$ e $y=0$ em $x=L$ então $C1 \sin(kl)=0$. A partir disto é possível determinar a carga crítica, pois P é dado pela equação 2.4.

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}. \quad (2.4)$$

O menor valor de P será obtido sempre que n for igual a um, assim sendo, tem-se que a carga crítica pela equação 2.5.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (2.5)$$

E a tensão crítica pela equação 2.6.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{r}\right)}. \quad (2.6)$$

$$r = \sqrt[2]{\frac{Ix}{A}} \quad (2.7)$$

2.2 FLAMBAGEM EM PLACAS

Um elemento estrutural é denominado placa quando duas dimensões, largura e comprimento, prevalecem sob uma terceira, sua espessura. Existe uma relação de extrema importância para determinar o comportamento de uma placa quando submetida a carregamentos solicitantes, esta relação é chamada de esbeltez da placa. Esta é definida como a relação b/t , onde b é sua largura e t sua espessura. (STEELE; BALCH, 2009)

As placas podem ser classificadas em três categorias, sendo estas:

- Placas espessas: são aquelas em que a sua espessura é considerável com relação as outras dimensões, assim sendo, as deformações de cisalhamento devem ser consideradas pois as mesmas tendem a ser da mesma ordem de grandeza das deformações de flexão.
- Placas finas: são aquelas em que sua espessura é relativamente pequena se comparada com as outras dimensões, neste caso as deformações de cisalhamento são

consideradas desprezíveis pois sua ordem de grandeza é considerada extremamente pequena com relação as deformações de flexão.

- Membranas: são placas que possuem uma espessura tão fina que a rigidez de flexão tende a zero e as cargas transversais devem ser resistidas pela ação da membrana.

Diferente das flambagens em colunas, que se dão em apenas um plano, o fenômeno de flexão em placas, ocasionado por uma carga axial compressiva, ocorre em dois planos se tornando, assim, relativamente mais complexa. Uma grande diferença entre placas e colunas, no que diz respeito as características de flambagem, é que para as colunas a carga crítica é exatamente a carga de falha, já para as placas a carga crítica não é a carga de falha pois a mesma pode suportar cargas maiores que a sua carga crítica até a ruptura. Portanto é necessário entender como se dá o comportamento da placa após a flambagem para que se possa conhecer a carga que ocasionará a falha da estrutura.

Após o início da flambagem as tensões são redistribuídas sobre a seção transversal da placa, quando as tensões se aproximam da carga crítica local estas passam a se distribuírem de maneira não uniforme, concentrando-se nas bordas, assim, elevando a resistência da placa. As tensões são maiores onde há menor deslocamento lateral na placa, desta forma a placa resiste até a tensão de escoamento da borda, esta tensão é superior a tensão crítica de flambagem.

2.2.1 Método de solução sugerido por Kirchhoff-Love

A aplicação da tensão teórica de flambagem de um elemento estrutural plano, permiti ocorrer a troca de configurações de equilíbrio estáveis entre a forma reta e a levemente dobrada. Esta troca marca a região em que a aplicação contínua da carga resulta em crescimento acelerado de deflexões perpendiculares ao plano da placa. Sua importância está no fato de que flambagem inicia os processos físicos que levam a eventual falha da placa. A solução matemática de problemas específicos de flambagem requer que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas. (GERARD; BECKER, 1957)

A hipótese de Kirchhoff-Love assume que a placa tridimensional pode ser representada por um plano bidimensional. Quando esta hipótese é aplicada às placas, leva a uma equação diferencial parcial de quarta ordem, onde esta governa os deslocamentos fora do plano. Para uma placa isotrópica plana, como mostrada na figura 6, pode ser expressa conforme a equação 2.8. (FENNER; WATSON, 2016)

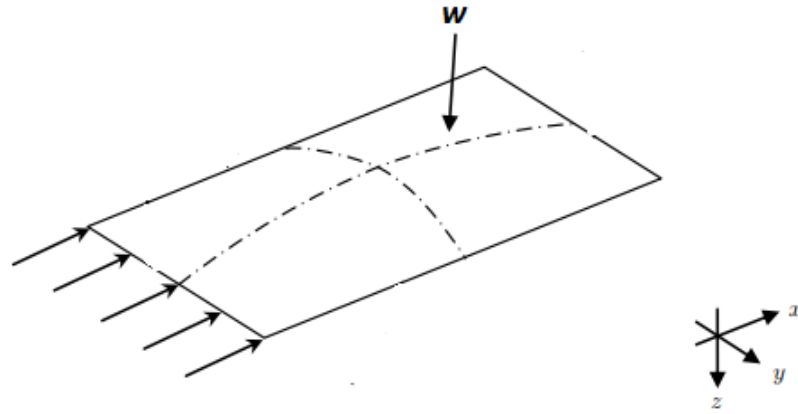


Figura 6 – Placa isotrópica plana.

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + 2D \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + D \frac{d^4 w}{dy^4} = Nx \frac{d^2 w}{dx^2} + Nxy \frac{d^2 w}{dx dy} + Ny \frac{d^2 w}{dy^2} \quad (2.8)$$

Onde D representa a rigidez da placa e Nx, Ny e Nxy são cargas distribuídas longitudinais, transversais e de cisalhamento respectivamente.

A teoria clássica de placas, que segue a hipótese de Kirchhoff-Love, sugere que uma placa irá sofrer deflexão de modo dependente da relação de aspecto e carga aplicada. A equação 2.9 define a carga crítica por unidade de largura para uma carga aplicada em uma placa de suporte simples largura b e comprimento a.

$$Nx = \frac{k\pi^2 D}{b^2} \quad (2.9)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.10)$$

Para encontrar as cargas distribuídas é necessário encontrar o k. Onde k é o coeficiente do modo de flambagem, que depende da forma que a placa irá flambar, m representa os modos de flambagem e t é a espessura da placa. O valor desse coeficiente é encontrado por meio do gráfico da figura 7, onde primeiramente encontra-se o valor da razão entre a largura e o comprimento da placa, ou seja, (a/b) . Sabe-se que esta razão tem que ser menor que m logo por meio deste resultado fixa-se o valor de m e por fim encontra-se o valor de k pela equação 2.11.

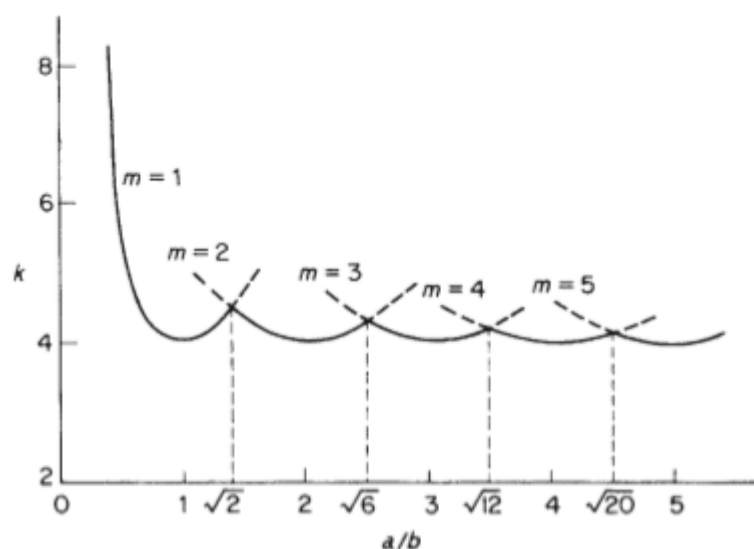


Figura 7 – k - Coeficiente de flambagem para placas simplesmente apoiadas. (MEGSON, 2007)

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (2.11)$$

2.3 FLAMBAGEM EM PLACAS REFORÇADAS

As placas reforçadas são formadas por dois elementos, sendo estes a placa que atua como revestimento e os reforçadores. Os reforçadores são elementos que ao serem soldados a placa proporcionam maior rigidez ao conjunto. Assim, uma placa reforçada é um sistema de placas rigidamente conectadas, consistindo de um placa que atua como revestimento, juntamente com um número de reforços ligados a ela, onde cada um pode ser um sistema de placas finas. Os enrijecedores efetivamente dividem a placa em uma série de tiras planas. Os modos de flambagem dividem-se em três grandes categorias: local, torsional e global.

Placas reforçadas podem possuir uma considerável reserva de força, permitindo que elas permaneçam em equilíbrio estável sob cargas além de sua capacidade crítica. Quando a flambagem inicial esta começa em um modo local iniciado pelo revestimento, ou seja, quando o revestimento entre os reforçadores tem o mais baixo valor de carga crítica de flambagem, assim, inicia-se a flambagem local. Essa deformação é propagada em torno da placa, tanto longitudinalmente como transversalmente. Sob carga adicional, outros tipos de flambagem podem ser observados, como flambagem geral e flambagem torcional; embora, devido à complexidade deste processo, é normal usar um computador programa para prever essa ocorrência. (FENNER; WATSON, 2016)

Alguns tipos de flambagem são mostradas nas figuras 7, 8 e 9.

- Flambagem localizada: Ocorre quando a placa entre os enrijecedores sofre flambagem local, assim, exemplificado na figura a seguir.

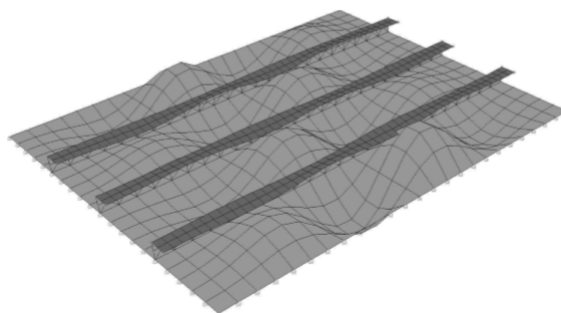


Figura 8 – Flambagem local da placa entre enrijecedores. (CARDOSO, 2009)

- Flambagem do enrijecedor: Ocorre quando o enrijecedor sofre flambagem por flexão lateral torsional.

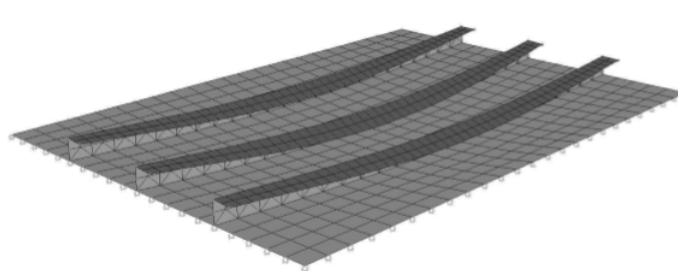


Figura 9 – Flambagem dos enrijecedores. (CARDOSO, 2009)

- *Modo geral de flambagem: Ocorre quando não há flambagem local, assim, a placa sofre flambagem como um todo.*

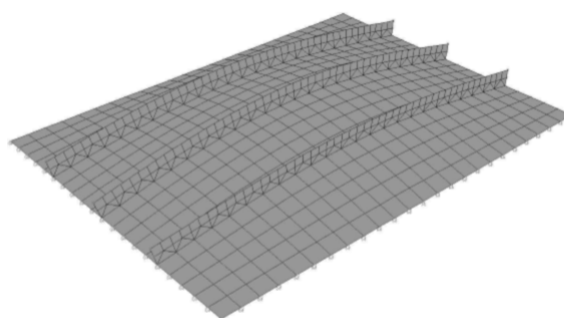


Figura 10 – Flambagem da placa como um todo. (CARDOSO, 2009)

2.3.1 Método de solução sugerido por Gerard

2.3.1.1 Instabilidade local

Na instabilidade local as flanges, utilizadas para o reforço, flambam assim como as placas. O comprimento de onda da flambagem é da ordem da largura dos elementos da placa. A curvatura ocorre quando o elemento mais fraco, geralmente uma flange, atinge o sua tensão crítica, embora, na maioria dos casos todos os elementos atingem as suas tensões críticas simultaneamente, quando isso ocorre os elementos se comportam como se fossem simplesmente suportados em suas arestas em comum.

O valor da tensão crítica local deve ser calculado utilizando um valor de k apropriado. Tendo como exemplo o seguinte caso, onde, uma coluna de seção cruciforme para uma placa simplesmente apoiada em três lados e $a/b > 3$, tem-se $= 0,43$.

Deve-se levar em consideração que o cálculo das tensões de flambagem locais é geralmente complicado visto que muitas das informações disponíveis são experimentais.

2.3.1.2 Instabilidade da placa reforçada

As placas que não possuem enrijecedores flambam com valores baixos de tensão crítica. O método utilizado para solucionar este problema é a adição de enrijecedores.

Uma estrutura mais eficiente é obtida ajustando-se as seções dos enrijecedores para que a curvatura ocorra em nos enrijecedores e na base do revestimento. Este é realizado por uma construção envolvendo enrijecedores de espessura semelhante à espessura do revestimento. Como seus esforços críticos são quase os mesmos, há uma interação na flambagem entre o revestimento e os reforços, de modo que o painel completo deve ser considerado como um corpo só.

A figura 11 exemplifica uma placa reforçada por membros longitudinais que podem ser planos.

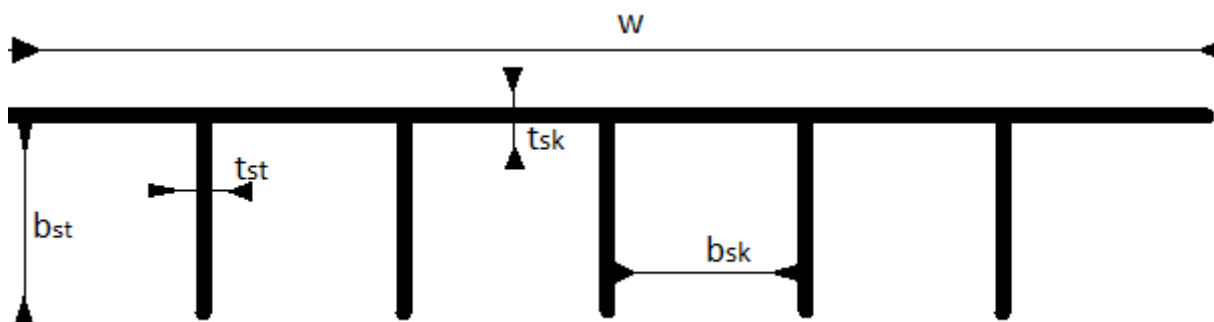


Figura 11 – Placa reforçada. Adaptado (MEGSON, 2007)

Além do modo de flambagem da coluna, os elementos de placa individuais, que compreendem a seção transversal do painel, podem sofrer uma deflexão com a placa

longa. Desta forma, a tensão será dada pela equação 2.12.

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-v^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.12)$$

Onde os valores de k , t e b dependem da porção da placa que está sendo analisada. Por exemplo, a parte do revestimento entre os reforços pode dobrar como uma placa simplesmente apoiada em todos os quatro lados. Assim, para $a/b > 3$, $k = 4$ e, assumindo que a flambagem ocorre na faixa elástica, tem-se a equação 2.13.

$$\sigma_{cr} = \frac{4\pi^2 E}{12(1-v^2)} \left(\frac{tsk}{bsk}\right)^2 \quad (2.13)$$

Uma outra possibilidade é que os enrijecedores possam dobrar-se à medida que as chapas longas são simplesmente apoiadas em três lados com uma borda livre. Portanto, tem-se a equação 2.14.

$$\sigma_{cr} = \frac{0,43\pi^2 E}{12(1-v^2)} \left(\frac{tst}{bst}\right)^2 \quad (2.14)$$

O valor mínimo das tensões críticas acima será o estresse crítico para o painel como um todo. Uma vez que estamos agindo no pilar da seção transversal, dividimos a carga por largura de unidade, chamando de N_x , por uma espessura de pele equivalente. Assim, tem-se a equação 2.15.

$$\sigma_a = \frac{N_x}{\bar{t}} \quad (2.15)$$

Onde o valor da espessura equivalente é dado pela equação 2.16.

$$\bar{t} = \frac{Ast}{Bsk} + tsk \quad (2.16)$$

2.4 MEF- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Método dos Elementos Finitos é uma técnica computacional usada para resolver problemas em engenharia, como avaliações de desempenho estrutural. É usado em problemas complexos onde os resultados analíticos são difíceis de obter.

O MEF modela uma estrutura, discretizando-a em um conjunto equivalente de unidades menores, elementos finitos, que estão interligados por pontos chamados nós.

A carga em flambagem e o modo de flambagem podem ser identificados por software de elementos finitos por meio de análise de flambagem de autovalores. A análise de flambagem de autovalor é aplicável para determinar a resistência de flambagem de uma estrutura elástica linear ideal em que termos não-lineares de material e geometria

são linearizados para manter a matriz de rigidez inalterada durante o progresso da carga. A flambagem de membros compressivos de parede fina é geralmente analisada usando elementos de casca. (HUANG; LI; WANG, 2016)

Como em diversos problemas não é possível elaborar uma função que descreva a curva de deflexão exata para a estrutura. Rayleigh Ritz generalizou um método ao construir uma família de funções, satisfazendo as condições cinemáticas de contorno, que na grande maioria das situações é possível separar os graus de liberdade e recair no cálculo de autovalores e autovetores. Onde os autovalores correspondem as cargas críticas e os autovetores correspondem aos modos de flambagem. (BISAGNI; VESCOVINI, 2007)

A característica mais importante que define um elemento finito é sua matriz de rigidez K . Esta matriz contém informações do comportamento geométrico e material do elemento, que determina a resistência do elemento à deformação quando submetido ao carregamento. Em outras palavras, relaciona a deformação do elemento \bar{u} à carga aplicada ao elemento \bar{Pa} , conformer mostrado na equação 2.17. (RODRÍGUEZ, 2015)

$$Pa = Ku \quad (2.17)$$

O MEF calcula a solução aproximada dos problemas com condições de contorno, onde são encontradas os valores do variáveis dependentes. As condições de contorno são os valores especificados das variáveis dependentes. Se as cargas Pa aplicadas à estrutura forem conhecidas, os deslocamentos u devem ser determinados, eles são as variáveis dependentes.

As variáveis dependentes são calculadas nos nós. Os valores das variáveis dependentes nos elementos podem ser calculados por meio de funções de interpolação. O número de graus de liberdade associados a um elemento finito é o produto dos nós dos elementos e a quantidade de variáveis de campo a serem computadas em cada nó. Em um modelo estático linear, implica um total de 6 graus de liberdade em cada nó, as três translações e três rotações sobre os eixos do sistema de coordenadas. Quando as deformações geométricas devidas às cargas aplicadas são pequenas e os níveis de tensões permanecem dentro da região elástica do material, a matriz de rigidez $[K]$ pode ser assumida como constante e os deslocamentos são encontrados executando uma inversão da matriz de rigidez.

Este é o método de solução de um modelo MEF elástico linear estático. Quando $[K]$ muda significativamente devido a grandes deslocamentos ou deformações além do limite elástico do material, assim, o modelo MEF geométrico não linear pode ser construído.

O fenômeno da flambagem consiste em uma grande mudança na deformação que se presta para o uso de soluções não lineares do MEF. No entanto, existe um método de solução que fornece excelente precisão para a maioria das aplicações, que possui o princípio da matriz de rigidez diferencial. (RODRÍGUEZ, 2015)

Quando trabalha-se com pequenas deformações nos elementos, o método é aplicado com apenas uma matriz de rigidez, esta é determinada pelas propriedades do material utilizado na geometria. No caso em análise, ou seja, na flambagem há grandes deformações sendo necessário considerar a não linearidade do sistema visto que ela afeta significativamente a rigidez da estrutura. Por esse motivo a matriz de rigidez diferencial K_d , ou seja, a rigidez não linear é considerada no sistema conforme mostrada da equação 2.18.

$$K = K_a + K_d \quad (2.18)$$

A matriz de rigidez não linear pode ser somada ou subtraída do sistema isso irá depender da carga aplicada. Na equação 2.18 a matriz é somada pois por se tratar de flambagem a carga aplicada é uma carga de compressão então isso tende a aumentar a rigidez, logo essa matriz precisa ser somada ao sistema. Se a análise fosse feita considerando uma carga aplicada com força de tração a matriz de rigidez não linear seria subtraída do sistema.

A resolução é realizada por meio da energia potencial do sistema. A equação 2.19 define a energia potencial total, para o equilíbrio estático do sistema.

$$[U] = 0, 5u^T[K_a]u + 0, 5u^T[K_d]u \quad (2.19)$$

Para garantir que a energia potencial total do sistema seja constante é realizada a derivada da equação 2.19 igualando-a a zero. Conforme mostrado na equação 2.20.

$$\frac{dU}{du} = [K_a]u + [K_d]u = 0 \quad (2.20)$$

Tendo em vista que a matriz de rigidez diferencial K_d , que considera a não linearidade do sistema, depende da carga aplicada esta matriz é encontrada por meio da equação 2.21, onde k_d é a matriz rigidez diferencial não linear com informações apenas das propriedades do material utilizado no objeto de análise.

$$[K_d] = Pa[k_d] \quad (2.21)$$

Substituindo a equação 2.21 na 2.20 tem-se a equação 2.22. Por meio da resolução da equação 2.22 tem-se como solução autovalores e autovetores, onde, os autovalores são os parametros de flambagem utilizados para encontrar a carga crítica e os autovetores os modos de flambagem.

$$[[K_a] + Pa[k_d]]u = 0 \quad (2.22)$$

Assim, é possível encontrar a carga crítica por meio da equação 2.23, onde λ representa os autovalores encontrados por meio da equação 2.24.

$$P_{cr} = \lambda P_a \quad (2.23)$$

Vale ressaltar que algumas limitações e suposições do Método dos Elementos Finitos existem para o problema de flambagem linear. As deflexões devem ser pequenas, as tensões dos elementos devem ser elásticas e a distribuição das forças do elemento devido às cargas aplicadas permanecem constantes.

O ANSYS possui uma biblioteca com vários elementos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. No presente trabalho se faz uso do elemento bidimensional SHELL 181.

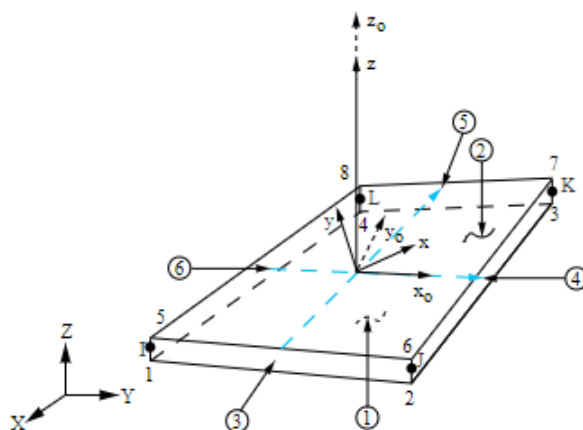


Figura 12 – Elemento SHELL 181.

O SHELL181 é adequado para analisar estruturas de casca finas até um pouco espessas. É um elemento de quatro nós com seis graus de liberdade em cada nó: translações nas direções x, y e z e rotações em torno dos eixos x, y e z. O elemento é adequado em qualquer tipo de deformação quer seja linear ou não-linear.

O ANSYS realiza a simulação dividindo-a em três etapas, sendo estas o pré-processamento, processamento e pós-processamento. No pré-processamento é realizada a definição das propriedades físicas e geométricas da peça em análise, a definição das dimensões da estrutura e a discretização da malha.

No processamento são definidas as condições de contorno, ou seja, as restrições de movimento a serem adotadas à estrutura, e o tipo de carregamento juntamente com seus pontos de aplicação. No processamento são realizados todos os cálculos solicitados ao sistema.

Em última instância realiza-se o pós-processamento onde é possível realizar a análise de resultados, como forças, deslocamentos, momentos, critérios de rupturas, entre outras análises.

3 RESULTADOS

3.1 RESULTADOS ANALÍTICOS

3.1.1 Placa plana

Sabendo que $a = 1500mm$ e $b = 525mm$ então $a/b = 2,85$, sabendo que $a/b < m$ toma-se $m = 3$ pelo gráfico da figura 6. Assim, torna-se possível encontrar o valor de k pela equação 2.11, onde $k = 4$.

Sabendo que a área da seção transversal das placas reforçadas é $A = 5070mm^2$, tem-se que a espessura equivalente da placa plana será de $\bar{t} = 9,657mm$. Assim, por meio da equação 2.12 tem-se que a tensão crítica será de $\sigma_{cr} = 89,56N/mm^2$.

Tabela 1 – Resultados analíticos- Placa plana

	Pcr	Tensão crítica	Nx
PLACA PLANA	$4,54 \times 10^5 (N)$	$89,56 (N/mm^2)$	$864,94 (N/mm)$

3.1.2 Placas reforçadas

As placas foram dimensionadas para possuírem a mesma área de seção transversal de modo que garanta o mesmo peso em todas para que, assim, possam ser comparadas. A área de todas as placas é dada por $A = 5070mm^2$. Para determinação das tensões críticas de flambagem as placas serão analisadas em quatro diferentes casos sendo estes:

- Caso 1: Flambagem no reforçador como um todo, considerando-o como uma coluna.
- Caso 2: Flambagem do revestimento entre os reforçadores, considerando este revestimento como uma placa apoiada em suas quatro bordas.
- Caso 3: Flambagem da flange vertical do reforçador, considerando-o como uma placa apoiada em suas quatro ou duas bordas o que irá depender da sua geometria.
- Caso 4: Flambagem da flange horizontal do reforço, considerando-o como uma placa apoiada em suas quatro ou duas bordas o que irá depender da sua geometria.

As figuras 13, 14, 15 e 16 demonstram a seção transversal de cada placa e destaca a seção transversal utilizada na análise de cada caso.

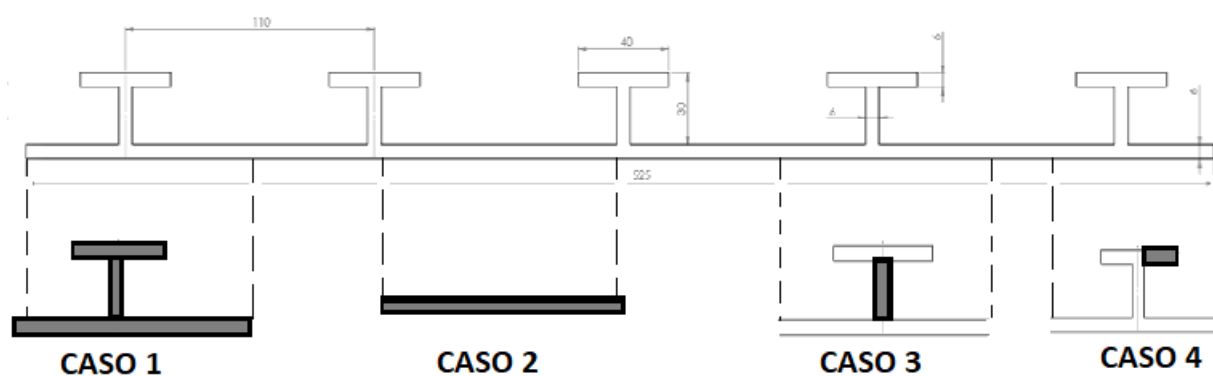


Figura 13 – Placa com reforçador em T

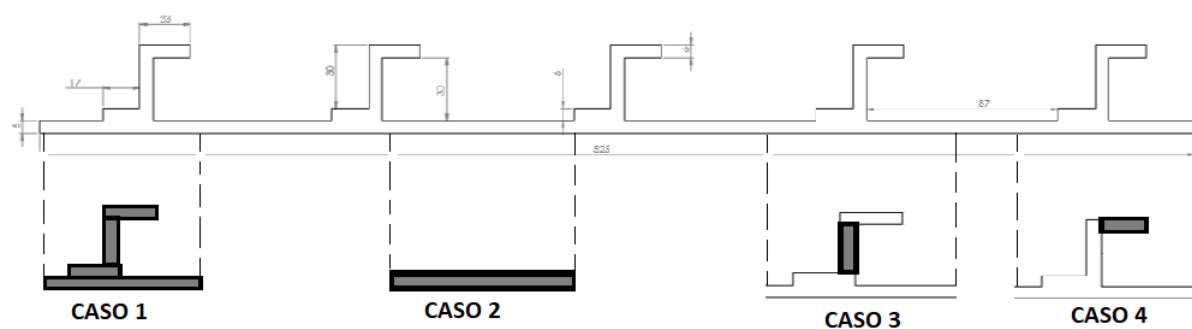


Figura 14 – Placa com reforçador em Z

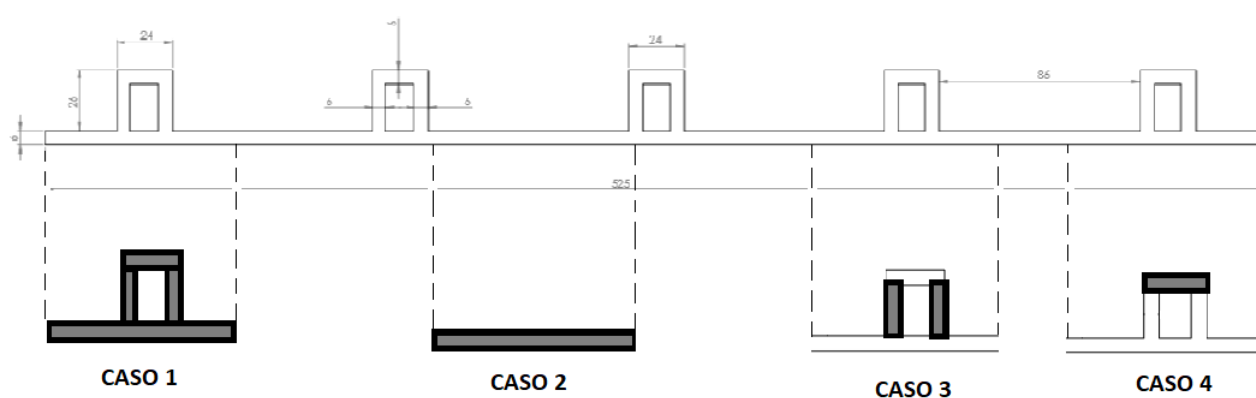


Figura 15 – Placa com reforçador em U

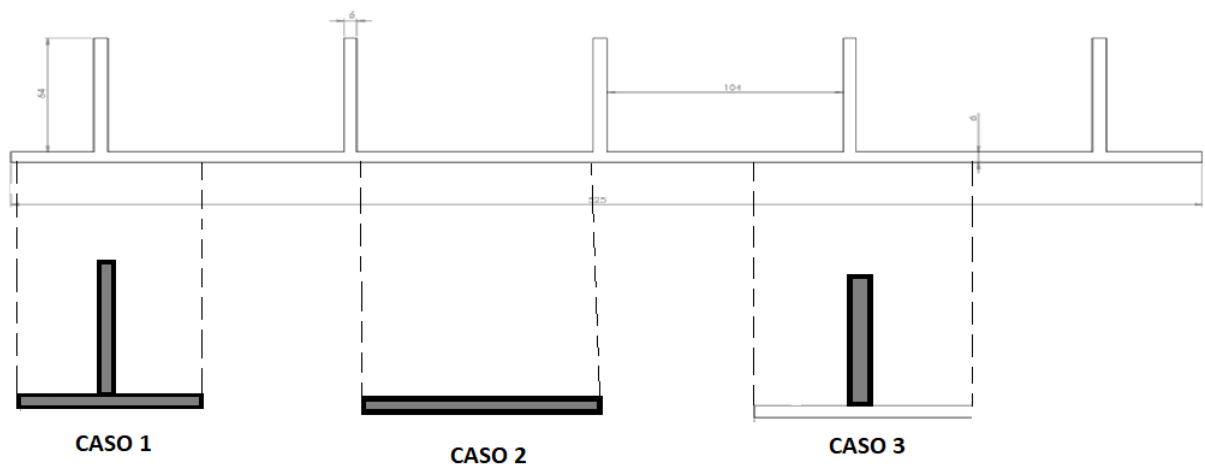


Figura 16 – Placa com reforçador plano

3.1.3 Caso 1- Flambagem no reforçador como uma coluna.

Faz-se necessário conhecer as seguintes propriedades geométricas da figura: Área da seção transversal do reforçador (A_o), espessura equivalente (\bar{t}), centroide(\bar{y}) e o momento de inércia (tx).

Tendo conhecimento de todas as propriedades geométricas que foram descritas acima é possível realizar o cálculo da tensão crítica σ_{cr} , pois a tensão crítica em colunas sujeitas a flambagem pode ser encontrada por meio da equação 2.6 e o cálculo da carga distribuída (Nx) pode ser encontrado por meio da equação 2.15.

3.1.4 Caso 2- Flambagem da placa entre as flanges do reforçador

Sabendo que para este caso trata-se de uma placa apoiada em suas quatro bordas, então toma-se $\eta = 1$ e $K=4$.Portantento tem-se que a tensão crítica será dada pela equação 2.14 e a carga distribuída será dada pela equação 2.15.

3.1.5 Caso 3- Flambagem da flange vertical do reforçador

Sabendo que para este caso trata-se de uma placa apoiada em suas quatro bordas, então toma-se $\eta = 1$ e $K=4$.Portantento tem-se que a tensão crítica será dada pela equação 2.13 e a carga distribuída será dada pela equação 2.15.

Sabendo que para o caso 3 da placa I trata-se de uma placa apoiada em apenas duas de suas bordas, então toma-se $\eta = 1$ e $K=0,43$. Portanto, a tensão crítica será dada pela equação 2.14 e a carga distribuída será dada pela equação 2.15.

3.1.6 Caso 4- Flambagem da flange horizontal do reforçador

Sabendo que para este caso trata-se de uma placa apoiada em apenas duas de suas bordas, então toma-se $\eta = 1$ e $K=0,43$. Portanto, a tensão crítica será dada pela equação 2.14 e a carga distribuída será dada pela equação 2.15.

Tabela 2 – Resultados analíticos placas reforçadas

(N/mm)	PLACA T	PLACA Z	PLACA U	PLACA I
CASO1	497	352	295	1234
CASO2	8362	11418	12228	8362
CASO3	157021	20014983	226110	2373
CASO4	33642	33642	628085	— -

3.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para realizar as simulações em elementos finitos das placas em análise, foi utilizado o software ANSYS versão estudantil, módulo Workbench. O pré-processamento foi feito de maneira a representar o modelo real, a malha possui um modelo satisfatório, e foram utilizados elementos de casca para a análise. As simulações são feitas por meios dos passos mostrados a diante.

- Confecção da geometria considerando- a como superfície.
- Elaboração da malha.
- Aplicação das condições de contorno.
- Realização dos cálculos numéricos.

3.2.1 PRÉ - PROCESSAMENTO

3.2.1.1 Definição das propriedades mecânicas

Ao iniciar a modelagem no software Ansys, o tipo de análise é definido como Estrutural Estático. O próximo passo é definir os dados do material que será utilizado na análise.

3.2.1.2 Confecção da geometria

A placas analisadas foram modeladas no próprio ANSYS, considerando-as como superfícies e em seguida aplicando as espessuras correspondentes. As geometria confec-

cionada é mostrada na figuras x, para a placa T, para as demais placas a geometria foi confeccionada de forma análoga.

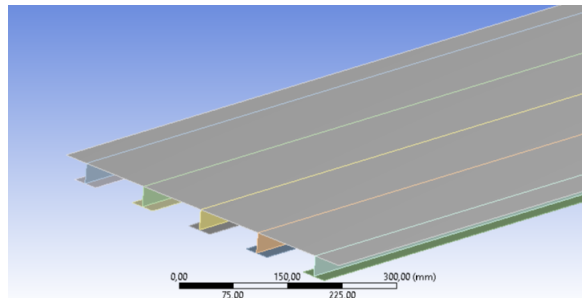


Figura 17 – Geometria da placa de seção transversal T.

3.2.2 Confeção da malha

A discretização do domínio foi feita a partir da confecção da malha. Esta foi gerada automaticamente pelo software de elementos finitos ANSYS 18.1 utilizando o elemento SHELL 181.

Para a placa plana foram realizadas sete malhas diferentes e para a placa reforçada foram realizadas dez variações com o objetivo de obter um refinamento da malha. O refinamento da malha foi obtido por meio da variação do tamanho do elemento. A tabela 3 e 4 mostram os resultados encontrados para cada passo do refinamento.

Tabela 3 – Refinamento da malha da placa plana

Simulação	Tamanho do elemento (mm)	Número de nós	Número de elementos	Pcr (N)
1	100	96	75	469000
2	75	168	140	457150
3	50	372	330	449490
4	25	1320	1239	444590
5	15	3636	3500	442277
6	10	8150	7947	441770
7	5	31906	31500	440780

Tabela 4 – Refinamento da malha da placa reforço em T

Simulação	Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos	Número de nós	Pcr (N)
1	100	425	816	686990
2	90	452	846	670890
3	80	483	880	664650
4	70	516	915	662740
5	60	575	980	650810
6	50	680	1091	647780
7	40	844	1266	645680
8	30	1200	1638	644270
9	20	2300	2772	642070
10	10	8294	8867	640200

3.2.3 PROCESSAMENTO

3.2.3.1 Aplicação das condições de contorno

As condições de contorno de todas as placas foram a de apoios de primeiro gênero, onde as placas estão simplesmente apoiada em todas as suas bordas. Para implementação no ansys foi utilizada a função "Displacement" onde foi possível restringir o movimento da placa em apenas alguns eixos do sistema de coordenadas. Nas arestas de 1500 mm das placas o movimento foi restrito apenas no eixo y e nas arestas de 525 mm o movimento foi restrito no eixo y e x.

A força aplicada possui uma natureza compressiva, logo, foi implementada uma força de 1 N em uma extremidade da placa e outra de mesma intensidade e sentido oposto na outra extremidade da placa. As arestas em que as forças foram aplicadas são arestas de 525mm. A figura 18 mostra com clareza como as condições de contorno foram aplicadas e a figura 19 apresenta o resultado final das condições de contorno aplicado na placa T.

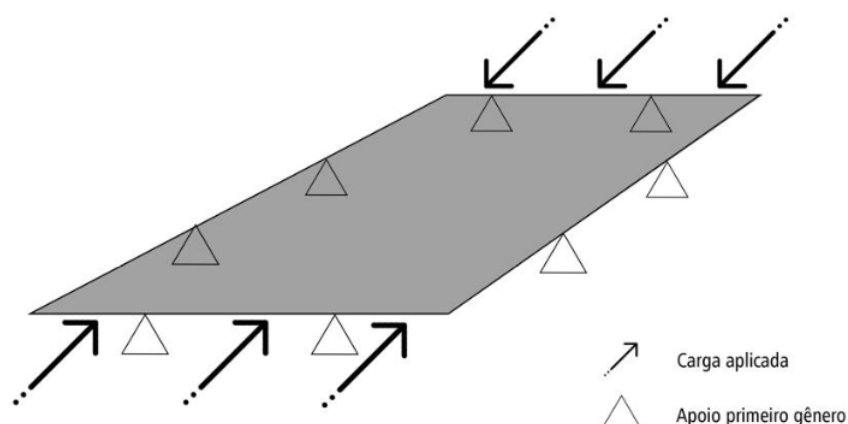


Figura 18 – Demonstração da aplicação das condições de contorno.

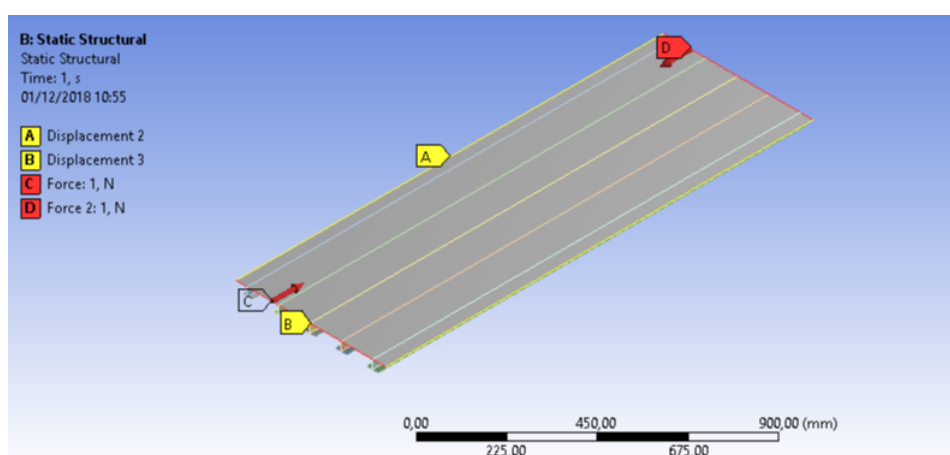


Figura 19 – Condições de contorno da placa de seção transversal T.

3.2.4 PÓS- PROCESSAMENTO

3.2.4.1 Resultados numéricos

Os gráficos das figuras 20 e 21 mostram o deslocamento total de cada placa quando submetidos ao fenômeno de flambagem. A força crítica é encontrada por meio da multiplicação entre a força aplicada e o coeficiente "load multiplier". Tendo em vista que a força aplicada foi de 1N tem-se que a força crítica será igual ao deslocamento total. A tabela 5 mostra os resultados numéricos para todas as placas.

Tabela 5 – Resultados numéricos.

	Caraga crítica (N)	Tensão crítica (N/mm^2)	Carga distribuida (N/mm)
Reforçador T	$6,4 \times 10^5$	127,67	1211,58
Reforçador Z	$4,3 \times 10^5$	86,48	820,78
Reforçador U	$7,6 \times 10^5$	149,99	1423,44
Reforçador Plano	$9,8 \times 10^5$	193,6	1873,35
Placa Plana	$4,4 \times 10^5$	86,78	838,08

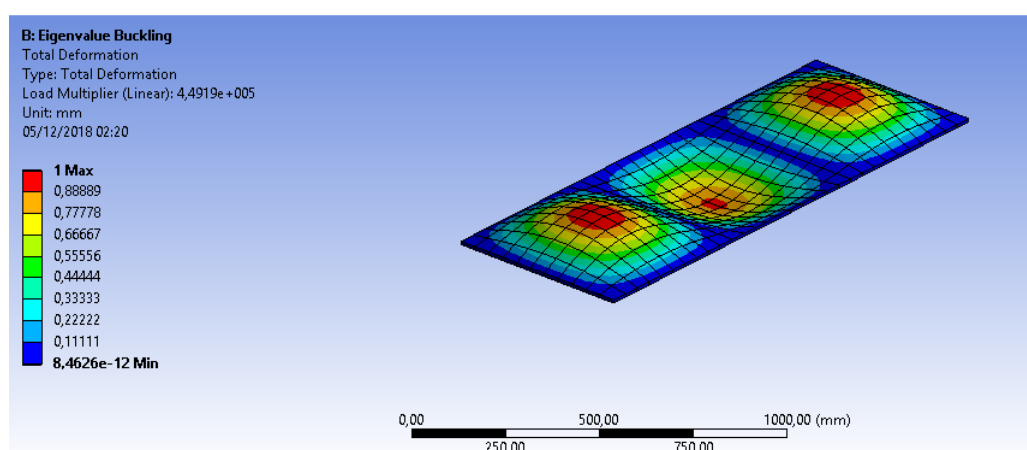


Figura 20 – Gráfico de resultados da placa plana.

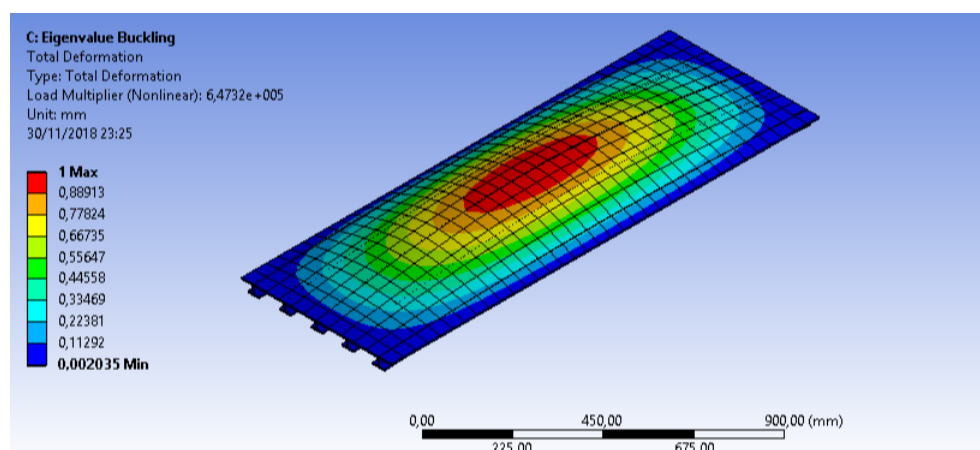


Figura 21 – Gráfico de resultados da placa de seção transversal T.

4 DISCUSSÕES

4.1 RESULTADOS ANALÍTICOS

Por meio dos resultados obtidos conforme mostrado na tabela 7, nota-se que o caso 1 de todas as placas tiveram uma carga distribuida referente a flambagem inferior aos outros casos, tornando este o caso crítico de flambagem. Assim, as placas tendem a falhar em seus respectivos reforços, tomando estes reforços como colunas.

Tabela 6 – Nx- Cargas distribuidas das placas referente a flambagem.

(N/mm)	PLACA T	PLACA Z	PLACA U	PLACA I
CASO1	497	352	295	1234
CASO2	8362	11418	12228	8362
CASO3	157021	20014983	226110	2373
CASO4	33642	33642	628085	— -

Inferre-se também que a placa que possui maior resistência a flambagem é a placa de seção transversal com geometria de reforçador plano e a de menor resistência é a placa de geometria em "U". Isto deve-se ao fato de que a placa com seção transversal com reforçador plano possui maior momento de inércia comparada as demais e a placa com seção transversal em "U" possui o menor momento de inércia. Sendo assim, é possível notar que quanto menor o momento de inércia da coluna menos resistente ao fenômeno de flambagem esta será. É exatamente por esse motivo que as colunas tendem a flambar entorno do eixo principal da seção transversal que possui o menor momento de inércia, pois este é o eixo menos resistente.

Tendo em vista estes aspectos inferre-se que para as placas em análise considerando suas respectivas dimensões, a placa com seção transversal com reforçador plano é a mais resistente a flambagem pois a mesma possui um momento de inércia maior com relação as outras.

Apesar da placa com reforçador plano ser a mais eficiente, do ponto de vista da aplicação do presente trabalho, ou seja, na asa de uma aeronave a placa em "T" torna-se mais viável visto que a placa com reforçador plano possui o comprimento do reforço muito grande. Com o comprimento do reforço muito grande a placa com reforçador plano ocuparia muito espaço dentro da asa, assim, prejudicando a alocação de outros subsistemas que são alojados dentro da mesma. Por esse motivo, foi feito uma análise de sensibilidade

da placa em T onde varia-se em vinte por cento as dimensões da placa e observa-se como as cargas distribuídas se comportam.

Esta variação é feita considerando vinte por cento para menos até vinte por cento para mais do valor inicial, considerando um passo de dois milímetros na implementação no software MATLAB. Assim, sendo possível chegar aos resultados finais plotados em gráficos.

No primeiro momento fixou-se o valor do revestimento e variou-se a altura do reforçador. Assim, obteve-se os resultados da figura 22 e da figura 23.

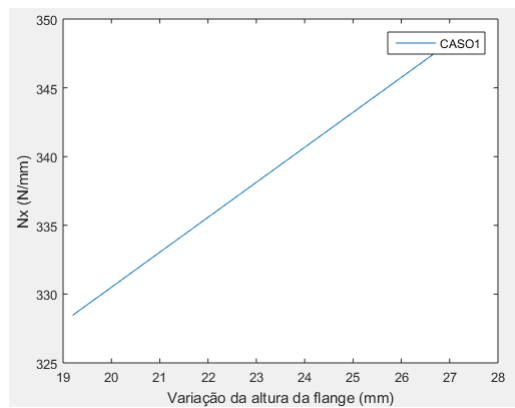


Figura 22 – Variação de 20% da altura do reforçador , placa em T CASO1.

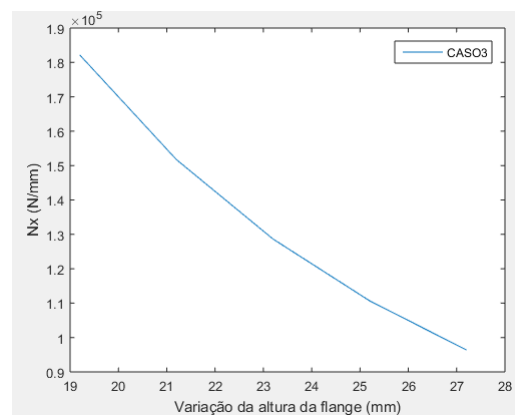


Figura 23 – Variação de 20% da altura do reforçador , placa em T CASO3.

Nota-se que a variação da altura do reforçador interfere na flambagem que ocorre no CASO 1 e no CASO 3. A medida que a altura do reforçador é aumentada a tensão crítica do CASO 1 aumenta e a do CASO 3 diminui. Isto ocorre pelos mesmos motivos que ocorreram na placa 'T', ou seja, no CASO 1 porque o momento de inércia da seção transversal aumenta fazendo com que a estrutura fique mais rígida quando é analisada como uma coluna. No CASO 3 a tensão crítica tende a cair a medida que a altura do reforçador é aumentada pois o reforçador quanto mais alto mais esbelto será fazendo que a placa flambe neste local pois o momento de inércia do seu eixo principal tende a cair.

Em uma segunda análise, o comprimento do revestimento da placa foi variado em mais ou menos vinte por cento com os demais valores fixados, obteve-se os resultados explicitados abaixo por meio da figura 24 e figura 25.

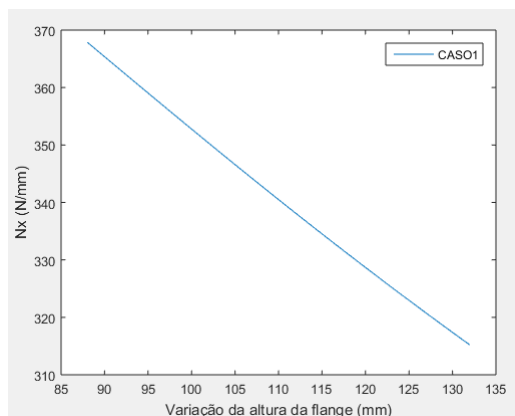


Figura 24 – Variação de 20 % da base que atua como revestimento, placa T CASO1.

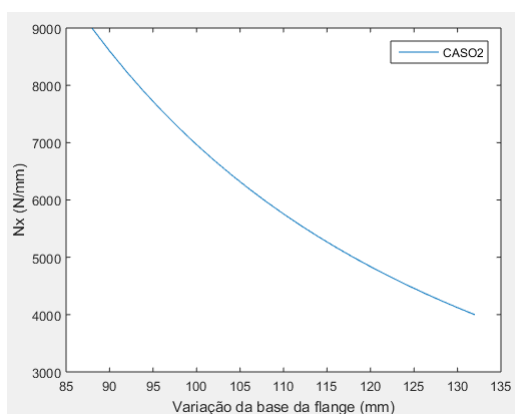


Figura 25 – Variação de 20 % da base que atua como revestimento, placa T CASO 2.

Observa-se que esta variação tem relação com o CASO1 e o CASO2 e em ambos os casos a tensão crítica de flambagem diminui à medida que o comprimento é aumentado. Nota-se então que o momento de inércia do eixo principal de ambas as análises diminui fazendo com que a estrutura fique menos resistente a flambagem.

Em seguida, variou-se a espessura de toda a placa e fixou-se os demais valores. Assim, obteve-se os resultados das figura 26.

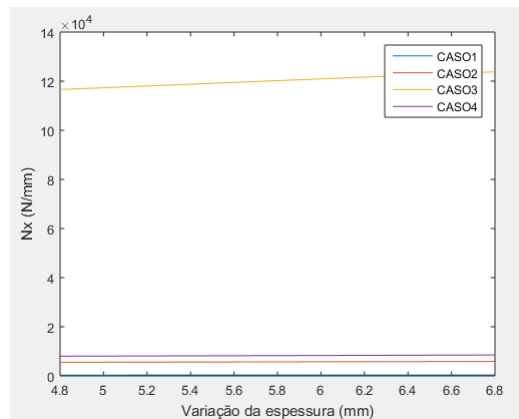


Figura 26 – Variação de 20% da espessura, placa T.

Nota-se que a variação da espessura tem relação com todos os casos envolvidos na placa, ou seja, CASO 1, CASO 2, CASO 3 e CASO 4. Porém apenas o CASO 3 modifica-se e os demais casos permanecem constantes. A variação ocorre no CASO 3 porque com a espessura da flange horizontal do reforçador variando em vinte por cento faz com que o momento de inércia do eixo principal da estrutura em análise seja alterado tornando-se de maior valor, assim, aumentando a resistência a flambagem.

Os demais casos a análise de sensibilidade da espessura está em uma escala muito pequena fazendo com que a mudança adotada não seja notória no cálculo dos momentos de inércia, assim, os momentos de inércia das seções transversais dos casos em análise permanecem inalterados fazendo com que as cargas distribuídas referente a cada caso permaneça constante.

Por fim analisa-se a variação de vinte por cento da flange horizontal do reforçador. Esta variação está relacionada com o CASO 1 e o CASO 4, conforme mostra a figura 27 e a figura 28.

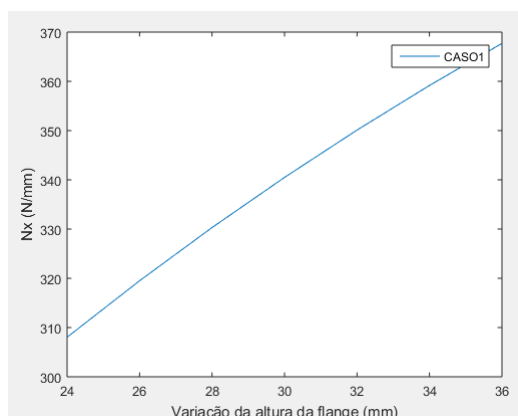


Figura 27 – Variação de 20% da flange horizontal do reforçador, placa T CASO1.

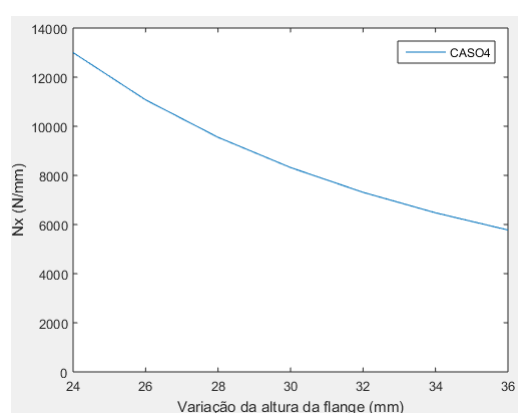


Figura 28 – Variação de 20% da flange horizontal do reforçador, placa T CASO4.

Percebe-se que no CASO1 a resistência à flambagem aumenta, o que leva a inferir que o momento de inércia do reforçador também aumenta. No CASO4 a medida que a flange horizontal aumenta a resistência à flambagem diminui o que leva a inferir que o momento de inércia local, neste caso, diminui deixando a estrutura localmente menos resistente a flambagem.

4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Percebe-se que para a placa plana, ou seja, que não há enrijecedores os resultados numéricos foram muito próximos do analítico gerando um erro de aproximadamente três por cento, a tabela 6 mostra com clareza.

Tabela 7 – Resultados analíticos e numéricos- Placa plana

(N/mm)	ANALÍTICO	NUMÉRICO	ERRO
PLACA PLANA	864,94	838,08	3,2%

Observa-se, então, que para placas onde não possui enrijecedores é possível por

meio de uma análise analítica prever a tensão crítica desta que se aproxima da realidade onde a análise numérica apenas reafirma o valor encontrado anteriormente, apresentando um erro de aproximadamente três por cento.

Tendo em vista, ainda, a placa plana e tomando como base os resultados do refinamento da malha, foi possível gerar o gráfico da figura 29.

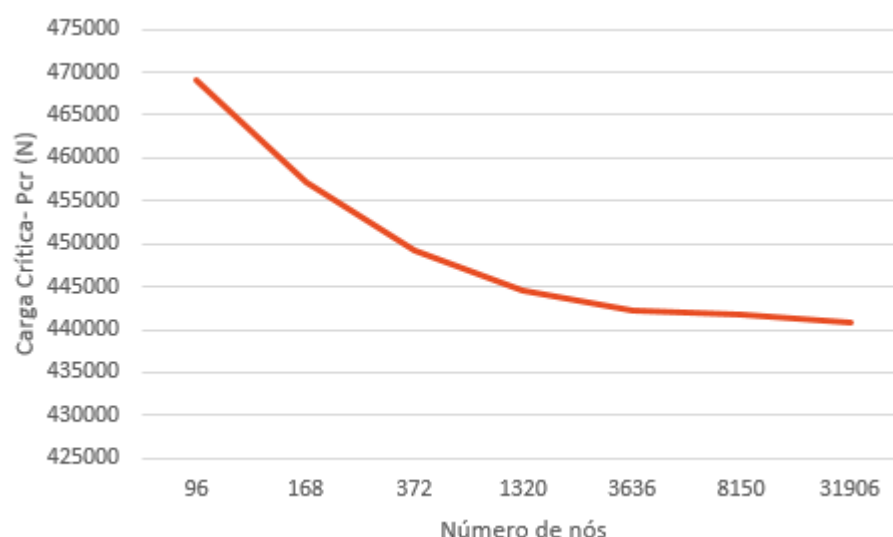


Figura 29 – Gráfico da convergência da malha da placa plana.

Nota-se pelo gráfico da figura 29 que os diferentes tamanhos de elementos utilizados para elaborar diferentes tipos de malha levou a convergência do resultado da carga crítica. Assim, pode-se inferir que caso a malha continuasse sendo refinada o valor da carga crítica seria o mesmo e apenas geraria um custo computacional desnecessário.

Quanto aos resultados encontrados nas placas reforçadas, analíticos e numéricos, nota-se que há uma discrepância muito grande entre ambos, mostrados na tabela 8.

Tabela 8 – Resultados analíticos e numéricos- Placas reforçadas.

(N/mm)	ANALÍTICO CASO 1	NUMÉRICO
REFORÇADOR T	497	1211
REFORÇADOR Z	352	820
REFORÇADOR U	295	1423
REFORÇADOR PLANO	1234	1873

A comparação dos resultados analíticos e numéricos confirmam a afirmação feita por Gerard em suas teorias, onde o mesmo afirma que a previsão de tensões críticas por

meios analíticos para painéis com um grande número de comprimentos longitudinais dos enrijecedores é difícil e depende fortemente de métodos aproximados. (MEGSON, 2007)

Porém, nota-se que apesar da discrepância tanto na análise analítica e numérica a placa mais eficiente nesta análise, em relação a estabilidade e peso específico, é a placa com reforçador em I visto que a mesma possui uma inércia bastante elevada.

Quanto ao refinamento da malha na placa reforçada é possível notar por meio da figura 30 que houve uma convergência no do resultado, assim, percebe-se que o refinamento foi satisfatório.

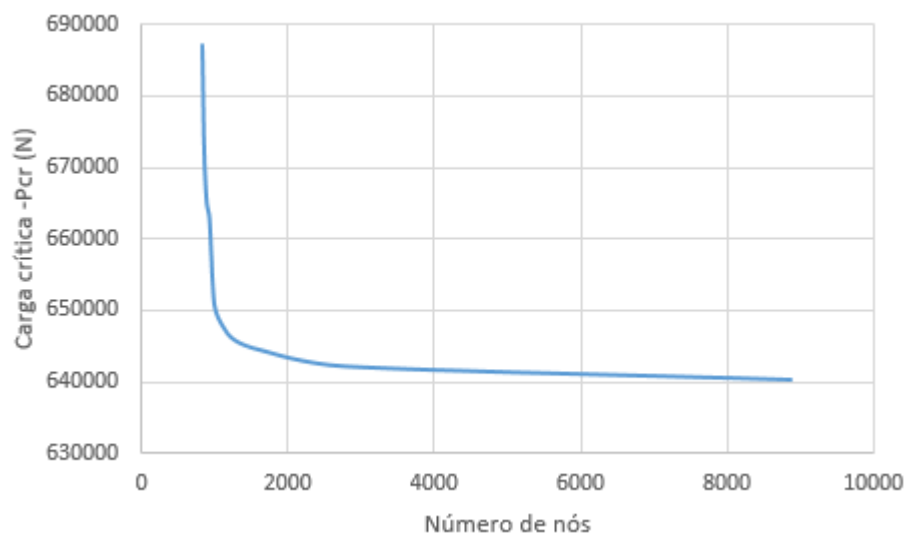


Figura 30 – Gráfico da convergência da malha da placa reforçada.

Observa-se também nos resultados numéricos por meio dos gráficos do comportamento das placas explicitados no pós processamento, que as placas reforçadas não sofrem flambagem local, ou seja, apenas no revestimento ou apenas no reforçador. Também não houve flambagem torsional, onde há a presença de pequenos deslocamentos no revestimento e os reforçadores permanecem quase intactos porém com pequenos deslocamentos, ou seja, a placa sofreu flambagem como um todo. Na placa plana observa-se a ocorrência de flambagem ocorre com um número maior do seu modo de flambagem visto a ausência de reforçadores.

5 CONCLUSÃO

Infere-se que o estudo da flambagem em placas reforçadas possui importância para a indústria aeronáutica, pois trata-se de uma indústria que utiliza estas placas em larga escala de produção. Nota-se também que se faz necessário escolher a geometria de seção transversal correta, que melhor satisfaz as exigências do projeto.

Por meio da análise realizada, notou-se que entre as geometrias dos reforçadores 'T', 'Z', 'U' e reforçador plano, a melhor geometria de seção transversal a ser utilizada para o caso em análise é a geometria em 'T'. Pois, mesmo que a placa com reforçador plano, analisada no presente trabalho, apresente maior resistência ao fenômeno de flambagem para a aplicação em uma asa de uma aeronave a placa com reforçador em 'T' torna-se mais viável pois a altura do seu reforçador é menor, assim, não ocupando espaços dentro da asa que são destinados a outros subsistemas.

Notou-se também que a resistência da placa reforçada, com relação a flambagem, quando analisado o reforçador como coluna está relacionada com o momento de inércia da mesma. Quanto maior for o momento de inércia do reforçador mais resistente ela será, pois as colunas flambam entorno do eixo que possui menor momento de inércia pois estes são os eixos menos resistentes.

Observa-se que o caso crítico para a placa com reforçador plano e para placa com reforçador em 'T' é o CASO 1 e fazendo uma análise de sensibilidade da mesma percebe-se que aumentando em vinte por cento a altura da flange do reforçador obtem-se um melhor resultado, pois se aumentar o comprimento do revestimento ou o comprimento da flange horizontal no caso da placa em 'T' a tensão crítica diminui e para a alteração de vinte por cento das espessuras o CASO 1 permanece inalterado.

Com a realização da análise numérica pode-se observar que, neste caso, os cálculos analíticos para placas reforçadas não possuem uma precisão satisfatória, assim como foi previsto por Gerard em seus estudos. Porém não pode-se afirmar que os cálculos analíticos não possuem exatidão pois para isto se faz necessário o uso de dados experimentais.

Por fim, observa-se que caso a placa não possua reforços e seja analisada apenas uma placa fina com a largura e o comprimento de mesmo tamanho os cálculos analíticos são precisos possuindo um erro de menos de quatro por cento de diferença com relação a análise numérica.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se para trabalhos futuros a análise de placas reforçadas confeccionadas por outro método de fabricação. Tendo como exemplo placas confeccionadas por meio de juntas rebitadas ou solda de fricção. (RUELA, 2010) Sugere-se também que seja implementado resultados experimentais na análise com o intuito de obter resultados analíticos mais satisfatórios que vão além da primeira fase de projeto. Assim, sendo possível encontrar cargas críticas, tensões críticas e cargas distribuídas por meio de cálculos analíticos e numéricos, de forma que estes possam ser comparados entre si.

Referências

- ALDERLIESTEN, R. *Introduction to Aerospace Engineering- Structures and Materials*. 1a edição. ed. [S.l.]: Faculty of Aerospace Engineering.Delft University of Technology TUDelft, 2010. Citado na página 18.
- ALDERLIESTEN, R. *Introduction to Aerospace Engineering- Aircraft and Spacecraft shell structures, lecture slides*. 2a edição. ed. [S.l.]: Faculty of Aerospace Engineering.Delft University of Technology TUDelft, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- ASM, m. *ASM Aerospace specification metals Inc*. 2001. Acesso em 06 de maio. 2018. Disponível em: <<http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA7075T6>>. Citado na página 19.
- BAZANT, G.; CEDOLIN, L. *Stability of structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. [S.l.]: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010. Citado na página 21.
- BEER, F. P.; JHONSTON, R. *Resistência dos Materiais*. 2a edição. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Book Co.,Brasil-Ltda, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 22.
- BISAGNI, C.; VESCOVINI, R. Analytical formulation for local buckling and post-buckling analysis of stiffened laminated panels. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, ELSEVIER, 2007. Citado na página 30.
- CARDOSO, D. C. T. *Resistência e desempenho estrutural de painéis enrijecidos de aço. Aplicação em silos metálicos enrijecidos*. 2009. Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) Brazil. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 27.
- CONCORDE., S. de S. H. *The Concorde Wing*. 2014. Acesso em 25 de abril. 2018. Disponível em: <<https://www.heritageconcorde.com/the-wing>>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 16 e 18.
- FENNER, P.; WATSON, A. Modelling infinite length panels using the finite element method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, World Scientific Publishing Company, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- GERARD, G.; BECKER, H. *Handbook of structure stability. Part I: Buckling of flat plates*. [S.l.]: NACA, New York University, 1957. Citado na página 24.
- HUANG, L.; LI, B.; WANG, Y. Computation analysis of buckling loads of thin-walled members with open sections. *Mathematical Problems in Engineering*, Fazal M. Mahomed, 2016. Citado na página 30.
- JANSSEUNE A.; CORTE, W. D. V. R. Column-supported silos: elasto-plastic failure. thin-walled structures. Essex, v, p. 158–173, 2013. Citado na página 21.
- MEGSON, T. *Aircraft Structure for engineering students*. 4a edição. ed. [S.l.]: Elsevier ltd, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 8, 15, 26, 28 e 48.

MELCONIAN, S. *Mecânica técnica e resistência dos materiais*. 17. ed. [S.l.]: Érica, 2010. Citado na página 21.

NASA; MUNROE, K. W. J.; GRUBER, M. *Integral Airframe Structures (IAS)—Validated Feasibility Study of Integrally Stiffened Metallic Fuselage Panels for Reducing Manufacturing Costs NASA/CR-2000-209337*. [S.l.]: Boeing Commercial Airplane Group, Seattle, Washington, 2000. Citado na página 17.

RODRÍGUEZ, G. J. H. *Comparison of finite element buckling solution for flat plates under complex combined loading to analytical methods*. [S.l.]: Aerospace engineering Bachelor thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2015. Citado na página 30.

RUELA, H. H. *Um estudo comparativo entre painéis reforçados planos: ligação rebitada versus FSW*. 2010. Trabalho de Graduação – Divisão de Engenharia Civil – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2010. Orientador: Prof. Francisco Alex Correia Monteiro. Citado na página 50.

STEELE, C. R.; BALCH, C. D. *Introduction to the Theory of Plates*. [S.l.]: Department of Mechanical Engineering Stanford University, 2009. Citado na página 23.

TIMOSHENKO, S. *Strength of materials: Advanced theory problem part II*. 2a edição. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Book Co., New York, USA, 1940. Citado na página 15.

US, D. of T.-F. A. A. *Aviation of Maintenance Technician Handbook- Airframe- Volume 1*. [S.l.]: Flight Standart Services, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 8, 17 e 18.

APÊNDICE A – CÁLCULOS ANALÍTICOS

A.1 Placa com reforçador em T

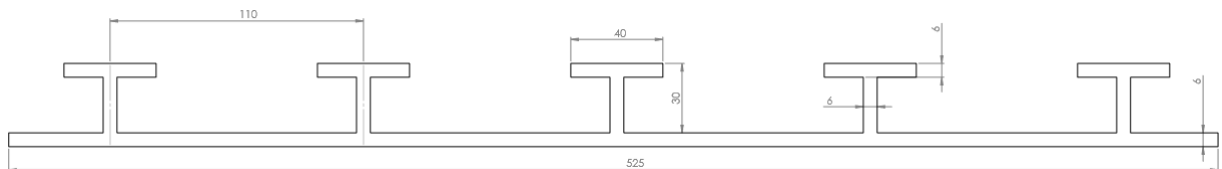


Figura 31 – Seção transversal da placa com reforçador em T.

A área da seção transversal da placa como um todo, com as medidas ilustradas na figura acima possui o valor de $A = 5070mm^2$

Os cálculos das tensões críticas para cada caso será mostrado abaixo:

- CASO 1: A análise será feita tomando o reforçador como uma coluna.

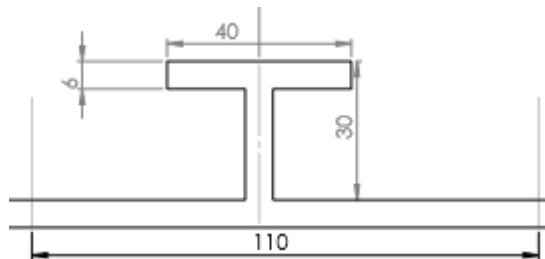


Figura 32 – Seção transversal do reforçador, placa em T.

Faz-se necessário conhecer as seguintes propriedades geométricas da figura: Área da seção transversal do reforçador (A_o), espessura equivalente (\bar{t}), centroide (\bar{y}) e o momento de inércia (tx). As propriedades geométricas citadas são calculadas abaixo:

- Área da seção transversal possui o valor de $A = 1044mm^2$
- Espessura equivalente: A espessura equivalente da placa é dada pela fórmula a seguir.

$$\bar{t} = \frac{A_2 + A_3}{b} + \delta \quad (A.1)$$

Onde \bar{t} possui o valor de $\bar{t} = 9,4909mm$

- Centróide: Para encontrar o centróide da peça é necessário saber o centro geométrico de cada geometria inúmerada na figura acima, as suas respectivas áreas e o produto entre ambas. A tabela abaixo fornece esses valores.

Tabela 9 – Cálculo do centroide em milímetros (mm).

Figura	\bar{y}	A	A\bar{y}
1	3	660	1980
2	18	144	2592
3	33	240	7920
Σ	—	1044	12492

Sabendo que o centroide da figura como um todo é dado por:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} \quad (\text{A.2})$$

Temos, a partir da tabela 3, que $\bar{y} = 11,9655mm$.

– Momento de inércia:

Sabendo que o momento de inércia da figura da geometria em questão é dado por:

$$Ix = \frac{bh^3}{12} + d^2bh \quad (\text{A.3})$$

Onde d é igual a distância do centro geométrico da figura calculada ao centroide a peça como um todo. Assim sendo, tem-se que $Ix = 174.4094,7586mm^4$

Tendo conhecimento de todas as propriedades geométricas que foram descritas acima é possível realizar o cálculo da tensão crítica σ_{cr} . Sabendo que a tensão crítica em colunas sujeitas a flambagem é dada por:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Onde l é igual ao comprimento da placa e r é dado por:

$$r = \sqrt{\frac{Ix}{Ao}} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo valores tem-se que r é igual a $r = 12,0134mm$

Assim, tem-se que a tensão crítica será $\sigma_{cr} = 52,44N/mm^2$

Cálculo da carga distribuída em que a placa irá flambar (Nx) pra o caso 1:

$$Nx = (\sigma_{cr}) (\bar{l}) \quad (\text{A.6})$$

Assim tem-se que $Nx = 497,765N/mm$

- CASO 2: Flambagem da placa entre as flanges do reforçador.

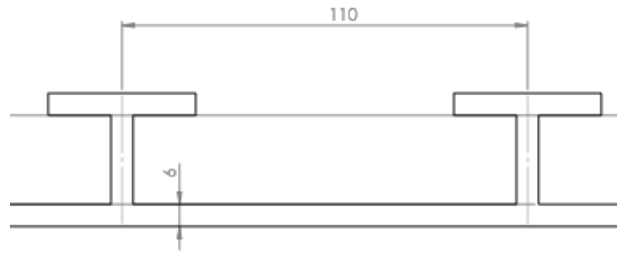


Figura 33 – Seção transversal da placa entre os reforçadores, placa em T.

A tensão crítica será dada por:

$$\sigma_{cr} = \frac{\eta K \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (\text{A.7})$$

Sabendo que para este caso tratase de uma placa apoiada em suas quatro bordas, então toma-se $\eta = 1$ e $K=4$. Portanto, tem-se que $\sigma_{cr} = 881,0631 N/mm^2$

A carga distribuida será:

$$Nx = (\sigma_{cr}) (\bar{t}) \quad (\text{A.8})$$

Assim tem-se que $Nx = 8.362,0817 N/mm^2$.

- CASO3: Flambagem da placa que representa a flange vertical do reforço.

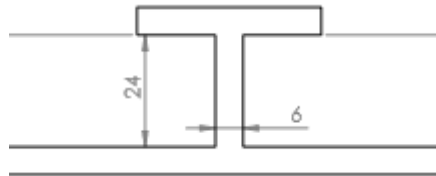


Figura 34 – Seção transversal da placa vertical dos reforçadores, placa em T.

Sabendo que para este caso trata-se de uma placa apoiada em suas quatro bordas, então toma-se $\eta = 1$ e $K=4$. Portanto, tem-se que:

$$\sigma_{cr} = \frac{4\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (\text{A.9})$$

Substituindo valores tem-se que a tensão crítica será $\sigma_{cr} = 16.544,4075 N/mm^2$

A carga distribuida será:

$$Nx = (\sigma_{cr}) (\bar{t}) \quad (\text{A.10})$$

Assim, tem-se que $Nx = 157.021,3177 N/mm^2$.

- CASO 4: Flambagem da placa que representa a flange horizontal do reforço.

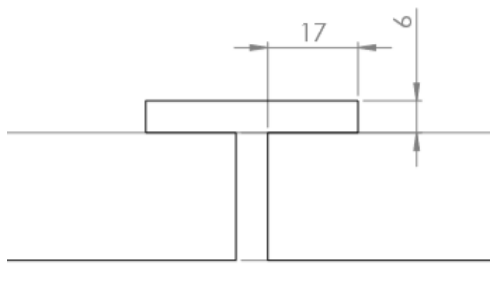


Figura 35 – Seção transversal da flange horizontal dos reforçadores, placa em T.

Sabendo que para este caso trata-se de uma placa apoiada em apenas duas de suas bordas, então toma-se $\eta = 1$ e $K=0,43$. Portanto, tem-se que:

$$\sigma_{cr} = \frac{0,43\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (\text{A.11})$$

Substituindo valores tem-se que a tensão crítica será $\sigma_{cr} = 3544,7395 \text{ N/mm}^2$.

A carga distribuída será:

$$Nx = (\sigma_{cr}) (\bar{t}) \quad (\text{A.12})$$

Assim, tem-se que $Nx = 67.519,1661 \text{ N/mm}^2$.

Observando a tabela a seguir nota-se que para esta placa a tensão de flambagem crítica será a considerada no caso 1, pois ela foi a menor, desta forma quando a flambagem alcançar a mesma a placa começará a flambar.

Tabela 10 – Nx- Carga distribuída da placa T referente a flambagem.

	Nx- Carga distribuída da placa T referente a flambagem (N/mm)
CASO 1	497
CASO 2	8362
CASO 3	157021
CASO 4	33642

APÊNDICE B – CÓDIGOS

IMPLEMENTADOS NO MATLAB

B.1 PLACA COM REFORÇADOR EM 'I'

B.1.0.1 VARIAÇÃO DA ALTURA DO REFORÇADOR

```
%Universidade de Brasilia- UnB
%TCC-Trabalho de conclusão de curso 2018
%Aluna: Larissa Lourrane Torres Vidal
%Matricula: 12/0124459
%%% VARIAÇÃO DA ALTURA DO REVESTIMENTO%%%

$$E = (71.7 * 10^3);$$

b=[51.2:2:76.8];
c=110;
delta= 6;
l=1500;
v=0.33
%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.
%% CÁLCULO DA ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

$$A = (b * delta) + (c * delta);$$

% Cálculo da espessura equivalente

$$t = [(b * delta)/110] + 6];$$

%% CÁLCULO DO CENTROIDE
% Dados
y1 = 3; %centro geométrico da figura1 no eixo y
y2 = 38; %centro geométrico da figura2 no eixo y
% Áreas

$$A1 = (c * delta);$$
 %Área da figura 1
```

```

A2 = (b * delta); %Área da figura 2
SA = A1 + A2; % Somatorio das áreas
% Relação da área e centro geométrico
B1 = A1 * y1; %Área da figura 1 multiplicada pelo seu centro geométrico
B2 = A2 * y2; %Área da figura 2 multiplicada pelo seu centro geométrico
SB = B1 + B2; % somatório
%Centroide
yy = (SB/SA);
%% CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA
Ix1 = (((c * delta^3)/12) + ((y1 - yy)^2 * A1)); %Momento de inércia figura 1
Ix2 = (((delta * b * b * b)/12) + ((y2 - yy)^2 * A2)); %Momento de inércia figura 2
Ixx = Ix1 + Ix2; %Momento de inércia total
%% CÁLCULO DE 'r'
r = (Ixx/A)^(1/2);
%% CÁLCULO DA TENSÃO CRÍTICA DE FLAMBAGEM
sigma1 = ((pi^2 * E)/(l/r)^2)
%% CÁLCULO DE 'Nx'
Nx1 = sigma1 * t
%% CASO3- Flambagem da flange vertical do reforçador
%DADOS
%% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA
sigma3 = ((0.43 * pi^2 * E)/(12 * (1 - v^2))) * ((6./b).^2); Nx3 = sigma3. * t;
%% GRAFICO plot(b,Nx3)
plot(b,Nx1,b,Nx3)
title('Relação de Nx com a variação de 20 da altura do reforçador')
ylabel('Nx')
xlabel('Variação da altura da flange')
legend('CASO1','CASO3')

```

B.1.0.2 VARIAÇÃO DO REVESTIMENTO

```

%Universidade de Brasilia- UnB
%TCC-Trabalho de conclusão de curso 2018
%Aluna: Larissa Lourrane Torres Vidal
%Matricula: 12/0124459
%% DADOS  $E = (71.7 * 10^3)$ ;
b=24;
c=[88:2:132];
delta= 6;
l=1500;
v=0.33
%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.
%% CÁLCULO DA ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL
 $A = (b * delta) + (c * delta)$ ;
% Cálculo da espessura equivalente
 $t = [(b * delta)/110] + 6$ ;
%% CÁLCULO DO CENTROIDE
% Dados
y1 = 3; %centro geométrico da figura1 no eixo y y2 = 38;%centro geométrico da
figura2 no eixo y
% Áreas
 $A1 = (c * delta)$ ;%Área da figura 1
 $A2 = (b * delta)$ ; %Área da figura 2
 $SA = A1 + A2$ ;% Somatório das áreas
% Relação da área e centro geométrico
 $B1 = A1 * y1$ ; %Área da figura 1 multiplicada pelo seu centro geométrico  $B2 =$ 
 $A2 * y2$ ; %Área da figura 2 multiplicada pelo seu centro geométrico
 $SB = B1 + B2$ ; % somatório
%Centroide
 $yy = (SB/SA)$ ;

```

```

%% CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA

Ix1 = (((c * delta^3)/12) + ((y1 - yy)^2 * A1)); %Momento de inércia figura 1
Ix2 = (((delta * b^3)/12) + ((y2 - yy)^2 * A2)); %Momento de inércia figura 2

Ixx = Ix1 + Ix2; %Momento de inércia total

%% CÁLCULO DE 'r'

r = (Ixx/A)^(1/2);

%% CÁLCULO DA TENSÃO CRÍTICA DE FLAMBAGEM

sigma1 = ((pi^2 * E)/(l/r)^2);

%% CÁLCULO DE 'Nx'

Nx1 = sigma1 * t

%% CASO2- Flambagem da placa entre os reforçadores %DADOS

%% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA

sigma2 = ((4 * pi^2 * E)/(12 * (1 - v^2))) * ((6./c).^2); Nx2 = sigma2 * t;

%% GRAFICO

plot(c,Nx1,c,Nx2)

title('Relação de Nx com a variação de 20% da base do reforçador')

ylabel('Nx')

xlabel('Variação da base da flange')

legend('CASO1','CASO2')

```

B.1.0.3 VARIAÇÃO DA ESPESSURA

```

%Universidade de Brasilia- UnB

%TCC-Trabalho de conclusão de curso 2018

%Aluna: Larissa Lourrane Torres Vidal

%Matricula: 12/0124459

%% DADOS

E = (71.7 * 10^3);

b=24;

c=110;

delta =[4.8:2:7.2];

l=1500;

```

```

v=0.33

%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.

%% CÁLCULO DA ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

$$A = (b * delta) + (c * delta);$$

% Cálculo da espessura equivalente

$$t = [(b * delta)/110] + 6;$$

%% CÁLCULO DO CENTROIDE
% Dados
y1 = 3; %centro geométrico da figura1 no eixo y
y2 = 38; %centro geométrico da figura2 no eixo y
% Áreas
A1 = (c * delta); %Área da figura 1
A2 = (b * delta); %Área da figura 2
SA = A1 + A2; % Somatório das áreas
% Relação da área e centro geométrico
B1 = A1 * y1; %Área da figura 1 multiplicada pelo seu centro geométrico
B2 = A2 * y2; %Área da figura 2 multiplicada pelo seu centro geométrico
SB = B1 + B2; % somatório
%Centroide
yy = (SB/SA);
%% CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA
Ix1 = (((c * delta).^3)/12) + ((y1 - yy)^2 * A1); %Momento de inércia figura 1
Ix2 = (((delta * b^3)/12) + ((y2 - yy)^2 * A2)); %Momento de inércia figura 2
Ixx = Ix1 + Ix2; %Momento de inércia total
%% CÁLCULO DE 'r'

$$r = (Ixx/A)^{(1/2)};$$

%% CÁLCULO DA TENSÃO CRÍTICA DE FLAMBAGEM

$$sigma1 = ((pi^2 * E)/(l/r)^2)$$

%% CÁLCULO DE 'Nx'
Nx1 = sigma1 * t

```

```

%% CASO2- Flambagem da placa entre os reforçadores
% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA

$$\sigma_2 = ((4 * \pi^2 * E) / (12 * (1 - v^2))) * ((\delta./c).^2);$$

Nx2 = sigma2. * t;
%% CASO3- Flambagem da flange vertical do reforçador
% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA

$$\sigma_3 = ((0.43 * \pi^2 * E) / (12 * (1 - v^2))) * ((\delta./b).^2);$$

Nx3 = sigma3. * t;
%% GRAFICO
plot(delta, Nx1, delta, Nx2, delta, Nx3)
title('Relação de Nx com a variação de 20
ylabel('Nx')
xlabel('Variação da espessura da flange')
legend('CASO1','CASO2','CASO3')

```

B.2 PLACA COM REFORÇADOR EM 'T'

B.2.1 VARIAÇÃO DA ALTURA DO REFORÇADOR

```

%Universidade de Brasilia- UnB
%TCC-Trabalho de conclusão de curso 2018
%Aluna: Larissa Lourrane Torres Vidal %Matricula: 12/0124459
%%%%%%%%%%%%% VARIAÇÃO DA ALTURA DO REVESTIMENTO%%%%%%%%%%%%%
%% DADOS  $E = (71.7 * 10^3)$ ;
b = [19.2 : 2 : 28.8];
c = 110;
a = 30;
delta = 6;
l = 1500;
v = 0.33
%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.
%% CÁLCULO DA ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

```

```

A = (b * delta) + (c * delta) + (a * delta);
% Cálculo da espessura equivalente
t = [(b * delta)/110] + 6];
%% CÁLCULO DO CENTROIDE
% Dados
y1 = 3;
y2 = 18;
y3 = 33;
% Áreas
A1 = (c * delta);
A2 = (b * delta);
A3 = (a * delta);
SA = A1 + A2 + A3;
% Relação da área e centro geométrico
B1 = A1 * y1; %Área da figura 1 multiplicada pelo seu centro geométrico
B2 = A2 * y2; %Área da figura 2 multiplicada pelo seu centro geométrico
B3 = A3 * y3; % Area da figura 3 multiplicada pelo seu centro geometrico
SB = B1 + B2 + B3; % somatório
%Centroide
yy = (SB/SA);
%% CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA
Ix1 = (((c * delta3)/12) + ((y1 - yy)2 * A1)); %Momento de inércia figura 1
Ix2 = (((delta * b. * b. * b)/12) + ((y2 - yy)2 * A2)); %Momento de inércia figura 2
Ix3 = (((a * delta3)/12) + ((y3 - yy)2 * A3));
Ixx = Ix1 + Ix2 + Ix3; %Momento de inércia total
%% CÁLCULO DE 'r'
r = (Ixx/A)(1/2);
%% CÁLCULO DA TENSÃO CRÍTICA DE FLAMBAGEM
sigma1 = ((pi2 * E)/(l/r)2)
%% CÁLCULO DE 'Nx'

```



```

Nx1 = sigma1 * t
%% CASO3- Flambagem da flange vertical do reforçador
%DADOS
%% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA
sigma3 = ((4 * pi^2 * E)/(12 * (1 - v^2))) * ((6./b).^2);
Nx3 = sigma3. * t;
%% GRAFICO
figure(1)
plot(b,Nx1)
ylabel('Nx (N/mm)')
xlabel('Variação da altura da flange (mmm)')
legend('CASO1')
figure(2)
plot(b,Nx3)
ylabel('Nx (N/mm)')
xlabel('Variação da altura da flange (mmm)')
legend('CASO3')

```

B.2.2 VARIAÇÃO DO REVESTIMENTO

```

%Universidade de Brasilia- UnB
%TCC-Trabalho de conclusão de curso 2018
%Aluna: Larissa Lourrane Torres Vidal
%Matricula: 12/0124459
%%%%%%%%%%%%% VARIAÇÃO DA ALTURA DO REVESTIMENTO%%%%%%%%%%%%%
%% DADOS
E = (71.7 * 10^3);
b = 24;
c = [88 : 2 : 132];
a = 30;
delta = 6;

```

```

l = 1500;

v = 0.33;

%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.

%% CÁLCULO DA ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

A = (b.*delta) + (c.*delta) + (a.*delta);

% Cálculo da espessura equivalente

t = [(b.*delta)/110] + 6];

%% CÁLCULO DO CENTROIDE

% Dados

y1 = 3; %centro geométrico da figura1 no eixo y

y2 = 18;%centro geométrico da figura2 no eixo y

y3 = 33;

% Áreas

A1 = (c.*delta); %Área da figura 1

A2 = (b.*delta); %Área da figura 2

A3 = (a.*delta);% Area da figura 3

SA = A1 + A2 + A3; % Somatorio das áreas

% Relação da área e centro geométrico

B1 = A1 * y1; %Área da figura 1 multiplicada pelo seu centro geométrico

B2 = A2 * y2; %Área da figura 2 multiplicada pelo seu centro geométrico

B3 = A3 * y3;% Area da figura 3 multiplicada pelo seu centro geometrico

SB = B1 + B2 + B3; % somatório

%Centroide

yy = (SB/SA);

%% CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA

Ix1 = (((c.*delta^3)/12) + ((y1 - yy)^2 * A1)); %Momento de inércia figura 1

Ix2 = (((delta * b.*b.*b)/12) + ((y2 - yy)^2 * A2)); %Momento de inércia figura 2

Ix3 = (((a.*delta^3)/12) + ((y3 - yy)^2 * A3));

Ixx = Ix1 + Ix2 + Ix3; %Momento de inércia total

%% CÁLCULO DE 'r'

```

```

r = (Ixx/A)^(1/2);
%% CÁLCULO DA TENSÃO CRÍTICA DE FLAMBAGEM
sigma1 = ((pi^2 * E)/(l/r)^2);
%% CÁLCULO DE 'Nx'
Nx1 = sigma1 * t;
%% CASO2- Flambagem da placa entre os reforçadores
%DADOS
%% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA
sigma2 = ((4 * pi^2 * E)/(12 * (1 - v^2))) * ((6./c).^2);
Nx2 = sigma2. * t;
GRAFICO
figure(1)
plot(c,Nx1)
title('Relação de Nx com a variação de 20 da altura do reforçador')
ylabel('Nx (N/mm)')
xlabel('Variação da altura da flange (mmm)')
legend('CASO1')
figure(2)
plot(c,Nx2)
ylabel('Nx (N/mm)')
xlabel('Variação da base da flange (mmm)')
legend('CASO2')

```

B.2.3 VARIAÇÃO DA ESPESSURA

```

%Universidade de Brasilia- UnB
%TCC-Trabalho de conclusão de curso 2018
%Aluna: Larissa Lourrane Torres Vidal
%Matricula: 12/0124459
%%%%%%%%%%%%% VARIAÇÃO DA ALTURA DO REVESTIMENTO%%%%%%%%%%%%%
%% DADOS

```

```

E = (71.7 * 103);
b = 24;
c = 110;
a = 30;
delta = [4.8 : 2 : 7.2];
l = 1500;
v = 0.33

%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.
%% CÁLCULO DA ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL
A = (b * delta) + (c * delta) + (a * delta);
% Cálculo da espessura equivalente
t = [(b * delta)/110] + 6];
%% CÁLCULO DO CENTROIDE
% Dados
y1 = 3; %centro geométrico da figura1 no eixo y
y2 = 18; %centro geométrico da figura2 no eixo y
y3 = 33;
% Áreas
A1 = (c * delta); %Área da figura 1
A2 = (b * delta); %Área da figura 2
A3 = (a * delta); % Area da figura 3
SA = A1 + A2 + A3; % Somatório das áreas
% Relação da área e centro geométrico
B1 = A1 * y1; %Área da figura 1 multiplicada pelo seu centro geométrico
B2 = A2 * y2; %Área da figura 2 multiplicada pelo seu centro geométrico
B3 = A3 * y3; % Area da figura 3 multiplicada pelo seu centro geometrico
SB = B1 + B2 + B3; % somatório
%Centroide
yy = (SB/SA);
%% CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA

```

$Ix1 = ((c * delta * delta * delta)/12) + ((y1 - yy)^2 * A1);$ %Momento de inércia
figura 1

$Ix2 = (((delta * b * b * b)/12) + ((y2 - yy)^2 * A2));$ %Momento de inércia figura 2

$Ix3 = ((a * delta * delta * delta)/12) + ((y3 - yy)^2 * A3);$

$Ixx = Ix1 + Ix2 + Ix3;$ %Momento de inércia total

%% CÁLCULO DE 'r'

$r = (Ixx/A)^{(1/2)};$

%% CÁLCULO DA TENSÃO CRÍTICA DE FLAMBAGEM

$sigma1 = ((pi^2 * E)/(l/r)^2)$

%% CÁLCULO DE 'Nx'

$Nx1 = sigma1 * t$

%% CASO2- Flambagem da placa entre os reforçadores

%DADOS

%% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA

$sigma2 = ((4 * pi^2 * E)/(12 * (1 - v^2))) * ((6./c).^2);$

$Nx2 = sigma2 * t;$

%% CASO3- Flambagem da flange vertical do reforçador

%DADOS

%% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA

$sigma3 = ((4 * pi^2 * E)/(12 * (1 - v^2))) * ((6./b).^2); Nx3 = sigma3 * t;$

%% CASO4- Flambagem da flange horizontal do reforçador

%DADOS

%% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA

$sigma4 = ((0.43 * pi^2 * E)/(12 * (1 - v^2))) * ((6./a).^2);$

$Nx4 = sigma4 * t;$

%% GRAFICO

figure(1)

plot(delta,Nx1,delta,Nx2,delta,Nx3,delta,Nx4)

ylabel('Nx (N/mm)')

xlabel('Variação da espessura (mmm)')

```
legend('CASO1', 'CASO2','CASO3','CASO4')
```

B.2.4 VARIAÇÃO DA FLANGE HORIZONTAL DO REFORÇADOR

```
%Universidade de Brasilia- UnB
%Universidade de Brasilia- UnB
%TCC-Trabalho de conclusão de curso 2018
%Aluna: Larissa Lourrane Torres Vidal
%Matricula: 12/0124459
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% VARIAÇÃO DA ALTURA DO REVESTIMENTO%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% DADOS
     $E = (71.7 * 10^3);$ 
     $b = 24;$ 
     $c = 110;$ 
     $a = [24 : 2 : 36];$ 
     $\delta = 6;$ 
     $l = 1500;$ 
     $v = 0.33$ 
%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.
%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.
%% CASO1- Flambagem do reforçador como coluna.
%% CÁLCULO DA ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL
     $A = (b * \delta) + (c * \delta) + (a * \delta);$ 
% Cálculo da espessura equivalente
     $t = [(b * \delta)/110] + 6;$ 
%% CÁLCULO DO CENTROIDE
% Dados  $y_1 = 3;$  %centro geométrico da figura1 no eixo y
 $y_2 = 18;$  %centro geométrico da figura2 no eixo y
 $y_3 = 33;$ 
% Áreas
 $A_1 = (c * \delta);$  %Área da figura 1
```

```

A2 = (b.*delta); %Área da figura 2
A3 = (a.*delta); % Area da figura 3
SA = A1 + A2 + A3; % Somatorio das áreas
% Relação da área e centro geométrico
B1 = A1.*y1; %Área da figura 1 multiplicada pelo seu centro geométrico
B2 = A2.*y2; %Área da figura 2 multiplicada pelo seu centro geométrico
B3 = A3.*y3; % Area da figura 3 multiplicada pelo seu centro geometrico
SB = B1 + B2 + B3; % somatório
%Centroide
yy = (SB/SA);
%% CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA
Ix1 = (((c.*delta^3)./12) + ((y1 - yy).^2.*A1));%Momento de inércia figura 1
Ix2 = (((delta.*b.*b.*b)./12) + ((y2 - yy).^2.*A2)); %Momento de inércia figura
2
Ix3 = (((a.*delta^3)./12) + ((y3 - yy).^2.*A3));
Ixx = Ix1 + Ix2 + Ix3; %Momento de inércia total
%% CÁLCULO DE 'r'
r = (Ixx/A)^(1/2);
%% CÁLCULO DA TENSÃO CRÍTICA DE FLAMBAGEM
sigma1 = ((pi.^2.*E)./(l./r).^2)
%% CÁLCULO DE 'Nx'
Nx1 = sigma1.*t
%% CASO4- Flambagem da flange horizontal do reforçador
%DADOS
%% CALCULO DA TENSÃO CRÍTICA
sigma4 = ((0.43 * pi^2 * E)/(12 * (1 - v^2))) * ((6./a).^2); Nx4 = sigma4.*t;
%% GRAFICO
figure(1)
plot(a,Nx4,a, Nx1)
ylabel('Nx (N/mm)')
```

```
xlabel('Variação da altura da flange (mmm)')  
legend('CASO1','CASO4')
```